ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Optimizasyon

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Ders 4

# Optimizasyon (Maksimum ve Minimum) Problemleri

Bu tarz problemleri çözmek için aşağıdaki adımları takip etmek kolaylık sağlar.

1.) Verilen problem dikkatlice okunarak verilenler ile optimizasyonu istenen nicelikler belirlenir. Eğer varsa verilenin tanım kümesi bulunur.
2) Bulunanlar probleme uygun bir şekil çizilerek şekil üzerinde gösterilir.
3) Verilen problemlerdeki nicelikler arasında denklemler yazılır. Birden fazla değişken söz konusu ise bunlar arasında bulunan denklemlerle ilişki kurularak değişken sayısı teke düşürülür.

Scanned with CamScanner

4) Eğer tanım kümesi varsa uç noktalar ve kritik noktalarda fonksiyon değerlerine bakılır. Bunun için birinci türev, gerekirse ikinci türeve bakılır.

Örnek: Toplamları 40 olan iki pozitif tamsayının kareleri toplamı en fazla kaçtır?

Çözüm:

| I. sayı | II. sayı |
|---|---|
| $x$ | $40-x$ |

$f(x) = x^2 + (40-x)^2 \quad , \quad 1 \leq x \leq 39$

$f'(x) = 2x + 2(40-x)(-1) = 0$

$4x - 80 = 0 \Rightarrow x = 20$ kritik nokta.

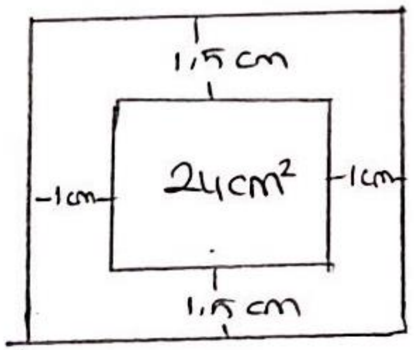
$f(1) = 1522$

$f(39) = 39^2 + 1^2 = 1522$ En büyük değeri 1522

$f(20) = 800$ En küçük " 800 olur

Örnek! Bir kağıdın 24 $cm^2$ lik kısmına yazı yazılacaktır. Alttan ve üstten 1,5 cm, sağdan ve soldan 1 cm boşluk bırakılacağına göre, bu kağıdın alanı en az kaç $cm^2$ dir?

Çözüm!




Yazı yazılacak kağıdın ebatları $x$ ve $y$ olsun.

Kağıdın alanı $= S$

$S = (x+2).(y+3)$ , $xy = 24$

$y = \dfrac{24}{x}$

$S = S(x) = (x+2)\left(\dfrac{24}{x} + 3\right) = 3x + \dfrac{48}{x} + 30$

$S'(x) = 3 - \dfrac{48}{x^2} = 0 \quad x^2 = 16 \Rightarrow x = \mp 4 \quad x > 0 \ \boxed{x = 4}$

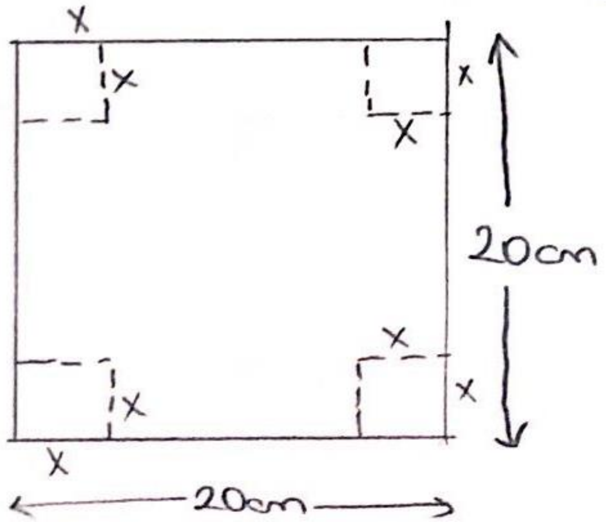
| $x$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| | | min | |

Kağıdın alanı en az

$S(4) = 54 \text{ cm}^2$ dir.

Örnek! 20 cm x 20cm ebatlarındaki bir levhadan, köşelerinden kareler kesilip katlanarak üstü açık bir kutu yapılacaktır. Kutunun hacminin maksimum olması için kesilen karelerin büyüklüğü ne olmalıdır?

Çözüm!



Kartonun kenarları 20 cm olduğundan fonksiyonun tanım kümesi $[0,10]$ olmalıdır.

Kutunun hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımı olduğundan

$$H(x) = x(20-2x)^2$$

dir.

$$H'(x) = (20-2x)^2 + 2x(20-2x)(-2)$$
$$= (20-2x)(20-6x) = 0$$

$\Rightarrow x = 10$ ve $x = \frac{10}{3}$ kritik noktalar.

Bu noktalar ve fonksiyonun uç noktalardaki değerleri.

$H\left(\frac{10}{3}\right) = 592\,cm^3$, $H(10)=0$, $H(0)=0$ olup, en büyük hacmi $592\,cm^3$ $x=\frac{10}{3}$ için sağlar.

Örnek: Dik silindir şeklinde $3m^3$ su alacak, üst kısmı açık olacak şekilde bir depo yapılacaktır. Deponun tabanında kullanılacak malzemenin $m^2$ si, yanal yüzeyinde kullanılacak malzemenin 2 katı fiyattadır. Deponun en ekonomik boyutlarını hesaplayınız.

Çözüm: Silindirin yarıçapı r, yüksekliği h olsun.
Silindirin maliyetinin MINIMUM olmasını istiyoruz.

$$V = \pi r^2 . h = 3m^3 \qquad \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$$

Taban alanı $= \pi r^2$
Yanal alanı $= 2\pi r . h$

Yanal alanda kullanılacak malzemenin maliyeti a lira olsun.
O halde silindirin maliyeti

$$M = 2\pi r . h . a + 2a . \pi r^2 = 2\pi r . \frac{3}{\pi r^2} . a + 2a . \pi r^2$$

$$M = \frac{6a}{r} + 2a\pi r^2 = f(r)$$

$$f'(r) = -\frac{6a}{r^2} + 4a\pi r = 0 \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$

$$f''(r) = 4\pi a + \frac{12a}{r^3} \quad \text{ve} \quad f''\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\right) = 12\pi a > 0$$

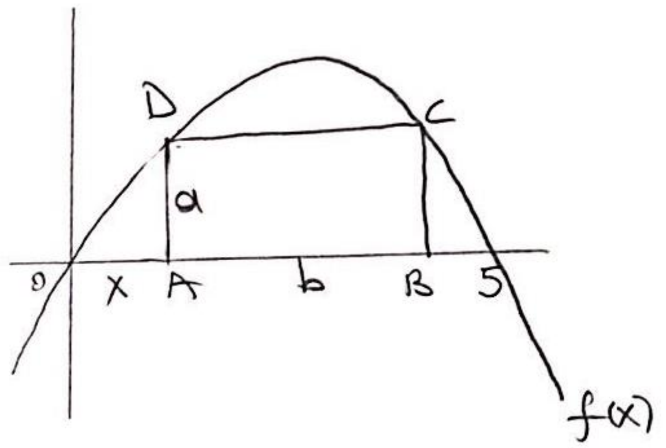
$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ için maliyet minimum olur.

$h = \dfrac{3}{\pi \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{2/3}}$ bulunur.

Örnek: $y = 5x - x^2$ parabolünün birinci bölgede kalan parçasının içine sığacak maksimum alanlı dikdörtgenin boyutları nelerdir?

Çözüm:

$$f(x) = x(5 - x)$$




$|OA| = x$ dersek $|OB| = x + b$

$|AD| = |BC| = a$

$D(x, a)$ ve $C(x+b, a)$

D ve C grafiğin üzerinde

$f(x) = f(x+b) = a$ dır.

$\Rightarrow 5x - x^2 = 5(x+b) - (x+b)^2$

$5b - 2xb - b^2 = 0$

$b(5 - 2x - b) = 0$ $\quad b \neq 0$ olup $\quad b = 5 - 2x$ dir.

$f(x)=a$ olup $a=5x-x^2$ dir.

$\Rightarrow a.b=(5x-x^2)(5-2x)$

$A(x)=2x^3-15x^2+25x$

$A'(x)=6x^2-30x+25=0$

$x_{1,2}=\dfrac{30\mp\sqrt{300}}{2.6}$ , $0<x<5$ olup

$x=\dfrac{30-\sqrt{300}}{12}$ dir.

| $x$ | | $\frac{30-\sqrt{300}}{12}$ | | $\frac{30+\sqrt{300}}{12}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $A(x)$ | $\nearrow$ | maks. | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ |

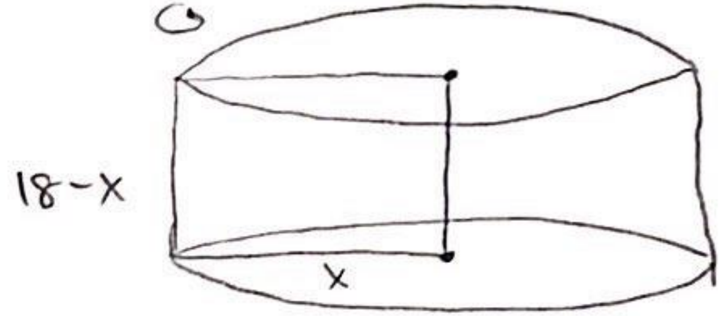
Maksimum alan için $x=\dfrac{30-\sqrt{300}}{12}$

$$a=\frac{75-25\sqrt{3}}{6}-\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$b=5-\frac{15-5\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$ bulunur.

Örnek: Çevresi 36 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir karton kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel silindirin hacmi en fazla kaç $cm^3$ olabilir.

Çözüm:




$$V = \pi x^2 . (18 - x)$$

$$= 18\pi x^2 - \pi x^3$$

$$V' = 36\pi x - 3\pi x^2 = 0$$

$$3\pi x (12 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 12$$

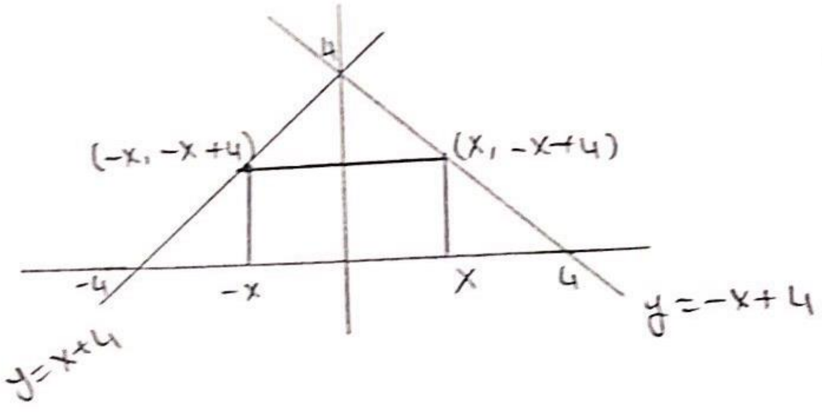
$$V'' = 36\pi - 6\pi x$$

$V''(12) = -36\pi < 0$ $\quad$ $x = 12$ maksimumdur.

Maksimum Hacim $= \pi . 12^2 (18 - 12) = 864\pi$ $cm^3$ dir.

Örnek! $y = x+4$ , $y = -x+4$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgede bulunan, iki köşesi verilen doğrular, iki köşesi de ox-ekseni üzerinde olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç $br^2$ dir.

ÇÖZÜM:




$$A(x) = 2x(-x+4) = 8x - 2x^2$$

$$A'(x) = 8 - 4x = 0 \qquad x = 2$$

$$A''(x) = -4 < 0$$

$x = 2$ maks.

maks. alan $= A(2) = 8$ $br^2$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Optimizasyon

Ders 4