ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

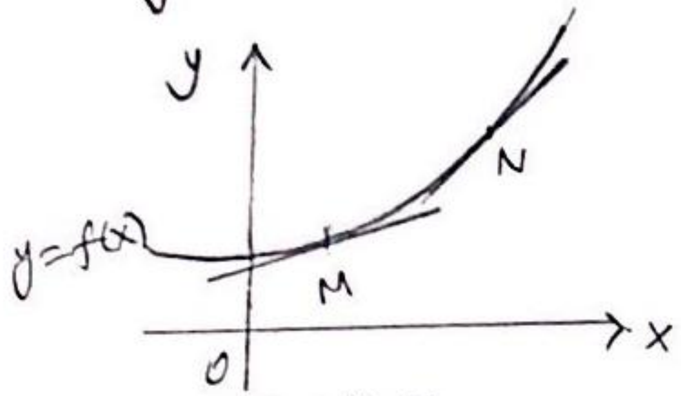
Fonksiyonların Bükeyliği (Konkav-Konveks)

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

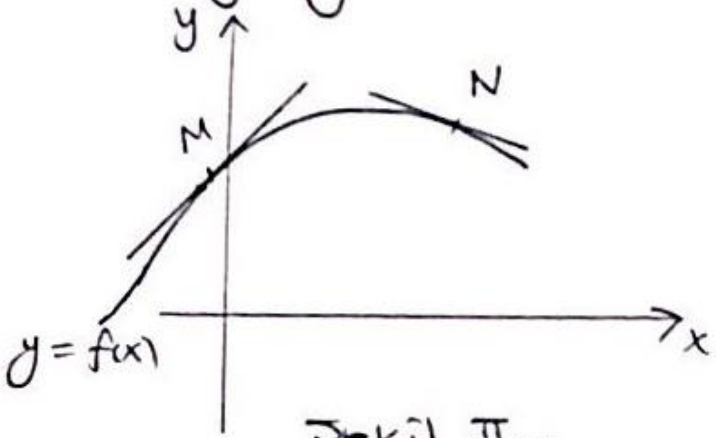
Ders 3

Fonksiyonların Bükeyliği (Konkavlık)

Aşağıdaki iki şekilde, $y=f(x)$ eğrisini ve bu eğri üzerindeki hareketli bir noktayı göz önüne alalım.



Şekil I.



Şekil II.

Şekil I. de olduğu gibi bu hareketli nokta M den N ye doğru ilerlediğinde teğetler saat yönünün tersine döner ve eğri teğetlerin üzerinde kalır ise eğriye yukarı konkavdır (konvekstir) denir.

Şekil II. de olduğu gibi bu hareketli nokta M den N ye doğru ilerlediğinde, teğetler saat yönünde döner ve eğri teğetlerin altında kalır ise eğriye aşağı konkavdır (konkavdır) denir.

Teğetin şekil I de olduğu gibi saat yönünün tersine dönmesi, $f'(x)$ fonksiyonunun türevinin artan bir fonksiyon olması anlamındadır. Buda $f''(x) > 0$ olduğunu söyler.

Benzer şekilde teğetin şekil II de olduğu gibi saat yönünde dönmesi $f'(x)$ türevinin azalan bir fonksiyon olması anlamındadır. Buda $f''(x) < 0$ olduğunu söyler.

Fonksiyonun II türevinin belirli bir aralıktaki işareti geometrik olarak fonksiyonun grafiğinin bükeyliğinin yönü hakkında bilgi vermektedir.

Tanım (Konkavlık için II. türev testi):

$y=f(x)$ fonksiyonunun $I \subset \mathbb{R}$ aralığında ikinci türevi olsun.

$f''(x)>0$ ise f nin grafiği I aralığında yukarı konkav

$f''(x)<0$ ise f nin grafiği I aralığında aşağı konkavdır.

Örnek: $y=3x^5-10x^3$ eğrisinin konkavlığını inceleyiniz.

Çözüm: $y'=15x^4-30x^2$ ve $y''=60x^3-60x$

$\Rightarrow y''=60x(x^2-1)=60x(x-1)(x+1)=0 \quad x_1=0, x_2=1, x_3=-1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	A.K		Y.K		A.K		Y.K

Tanım (Dönüm (Büküm) Noktası): Fonksiyonun grafiğinin yukarı konkavlıktan aşağı konkavlığa veya aşağı konkavlıktan yukarı konkavlığa geçiş yaptığı ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya fonksiyonun dönüm noktası veya büküm noktası denir. İkinci türevi sıfır yapan noktalarda ikinci türev işaret değiştiriyorsa bu noktalar dönüm noktasıdır.

Örnek: $y=x^3$ fonksiyonu için dönüm noktası araştıralım.

$y'=3x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$

$y''=6x=0 \Rightarrow x=0$

x		0	
f'	$+$	0	$+$
f''	$-$		$+$

$x<0$ için konkav

$x>0$ için konveks

$x=0$ dönüm noktasıdır.

Örnek: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ fonksiyonunu alalım.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+2x=0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-(2x+2)(x+1)}{(x^2+2x)^2} = -\frac{(x^2+2x+2)}{(x^2+2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x^2+2x+4)}{(x^2+2x)^3} = 0$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ayrıca $x=0$ ve $x=-2$ tanımsız.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2+2x		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	

$x=-1$ dönüm noktasıdır.

$x=-2$ ve $x=0$ tanımsız olduğundan dönüm noktası olamaz.

Örnek: $y=\sin x$ fonksiyonunun $[-\pi, 3\pi]$ aralığında ekstremumlarını ve dönüm noktalarını araştırınız.

Çözüm: $y' = \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$[-\pi, 3\pi]$ aralığındaki kritik noktalar $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$

$y'' = -\sin x = 0 \quad x = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

$[-\pi, 3\pi]$ için $\quad -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$$\left.\begin{array}{l} y''(-\frac{\pi}{2}) = 1 > 0 \\ y''(\pi/2) = -1 < 0 \\ y''(3\pi/2) = 1 > 0 \\ y''(5\pi/2) = -1 < 0 \end{array}\right\}$$

$x = 3\pi$
$x = -\frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$ için yerel minimum nokta

$x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{5\pi}{2}$ yerel maksimum nokta.
$x = -\pi$

$f(3\pi) = 0 \quad f(-\frac{\pi}{2}) = -1 \ , f(\frac{3\pi}{2}) = -1 \qquad -\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{3\pi}{2}$ mutlak min nokta

$f(-\pi) = 0 \quad f(\frac{\pi}{2}) = 1 \ , f(\frac{5\pi}{2}) = 1 \qquad \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{5\pi}{2}$ mutlak maks. "

X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y''	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
	y maks	$\searrow$	-1 y. min	$\nearrow$	D.N	$\nearrow$	$+1$ y. maks	$\searrow$	D.N	$\searrow$	-1 y. min	$\nearrow$	D.N	$\nearrow$	1 y. maks.	$\searrow$	y. min

EĞRİ ÇİZİMLERİ

$y=f(x)$ eğrisinin çizimi için aşağıdaki adımları takip etmek kolaylık sağlar.

1) Tanım kümesi ve varsa simetriler bulunur. Eksenleri kestiği noktalar bulunur.
2) Birinci ve ikinci türevler bulunur.
3) Kritik noktalar ve bu noktalarda ekstremumlar belirlenir.
4) Eğrinin artan ve azalan olduğu aralıklar bulunur.
5) Konkavlık incelenerek büküm noktaları bulunur.
6) Asimptotlar varsa bulunur.
7) Tüm bunlar ortak bir tabloda gösterilir ve grafik çizimi yapılır.

NOT: Eğer f fonksiyonu trigonometrik tomdeğer fonksiyonlarını içeriyorsa periyot incelemesi de yapılabilir.

Hatırlatmalar:

$f(-x)=f(x) \Rightarrow f$ çift fonksiyon y eksenine göre simetrik

$f(-x)=-f(x) \Rightarrow f$ tek fonksiyon orjine göre simetrik.

Düşey asimptot fonksiyonu tanımsız yapan ayrık tekil noktalarda aranır.

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=c \Rightarrow y=c$ yatay asimptottur.

Yatay asimptot yoksa eğri (veya eğik) asimptot olabilir.

$y=mx+n$ eğik asimptotunu $+\infty$ kolda ve $-\infty$ kolda nasıl bulunacağını hatırlatalım.

$$m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ve} \quad n = \lim_{x \to \mp\infty} f(x) - mx$$

şeklinde bulunur.

* $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonu için $a < 0$ ise asimptot yoktur.

$a > 0$ ise eğik asimptot

$$y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$ şeklindedir.

Örnek: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$x=1$ $+\infty$ ve $-\infty$ kolda düşey asimptottur.

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\mp\infty$$ olup yatay asimptot yok, eğri asimptot olabilir.

"Rasyonel fonksiyonlarda eğri (eğik) asimptot payı paydaya bölerek bulunur. Bölüm fonksiyonu eğri (eğik) asimptottur."

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \underline{x^2-x} & x+1 \\ x+1 & \\ -\ \underline{x-1} & \\ 2 & \end{array}$$

$y = x+1$ eğik asimptottur.

Eksenleri kesim noktalarını bulalım.

$x=0 \Rightarrow y=-1 \quad (0,-1)$

$y=0$ için x eksenini kesmez.

Ekstremumlar:

$$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \qquad x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{2}$$

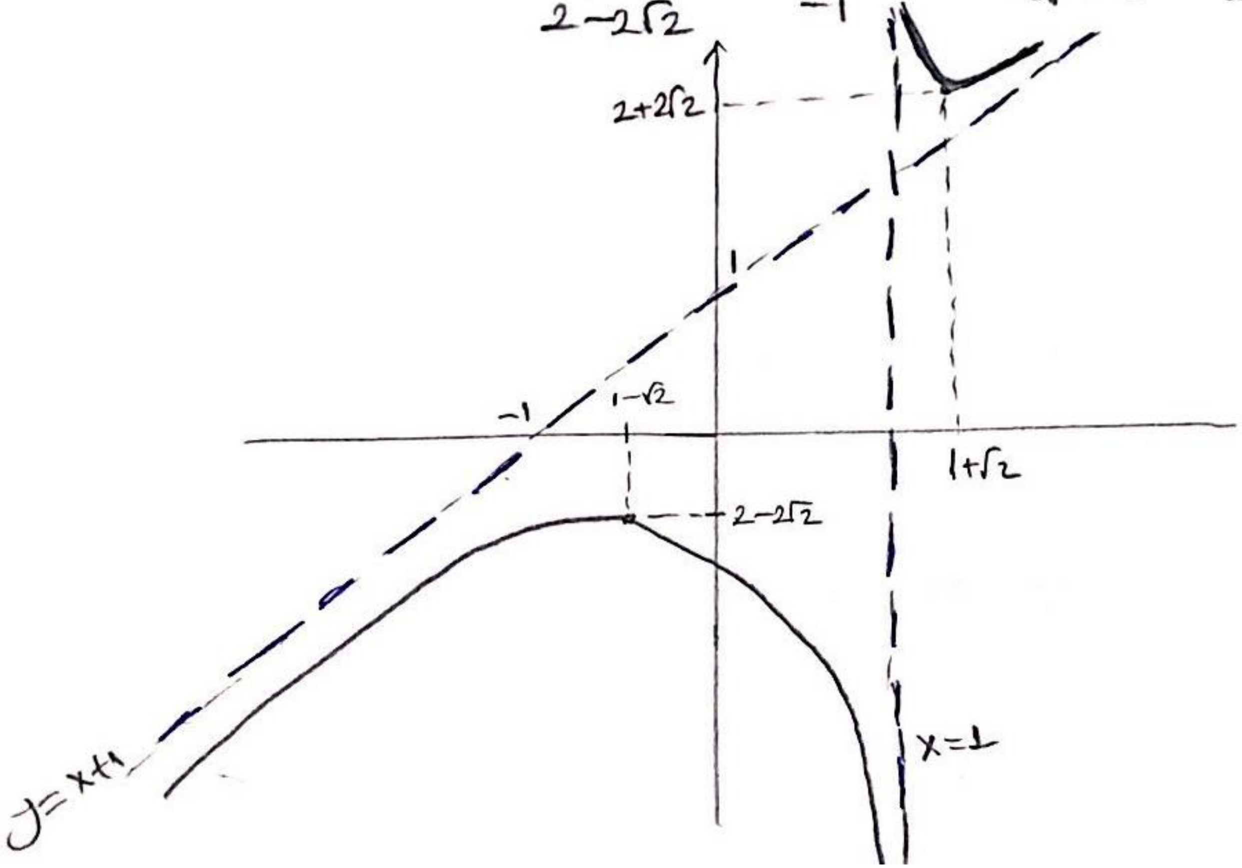
için

$y_{1,2} = 2 \mp \sqrt{2}$ bulunur.

$y'' = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0 > 0$ olup fonksiyon heryerde iç bükeydir.

Tabloyu oluşturalım.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Örnek: $y = x^4 - 8x^2$ eğrisini çiziniz

$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$x = 0,\ y = 0 \quad (0,0)$

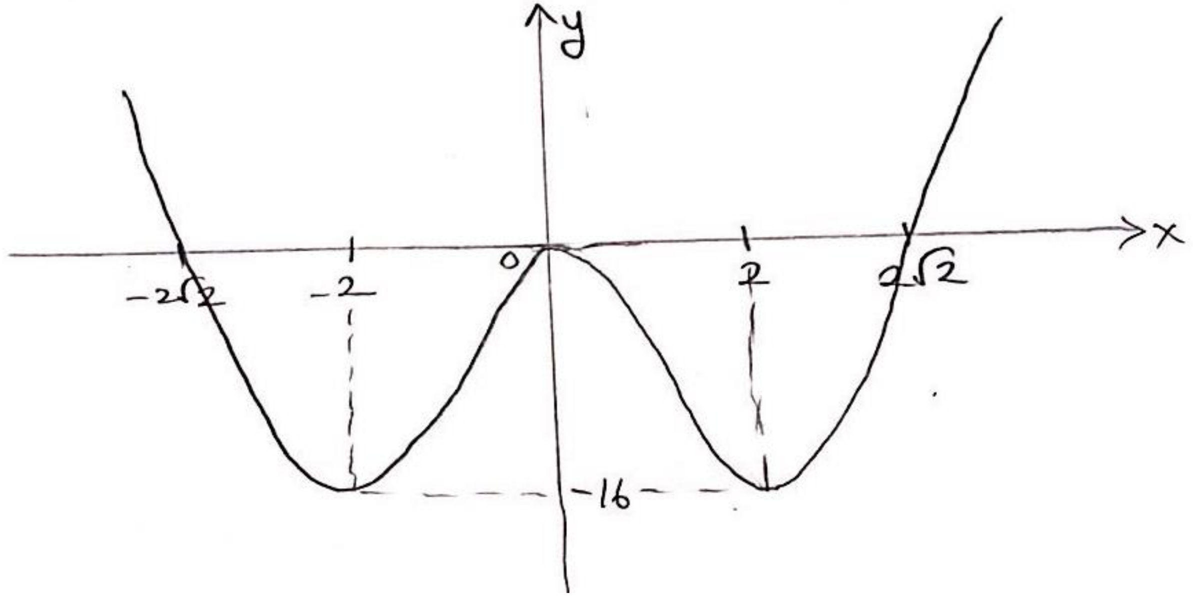
$y = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 0,\ x_3 = -2\sqrt{2},\ x_4 = 2\sqrt{2}$

$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 0 \qquad x = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

Asimptot yoktur.

$f(-x) = f(x)$ çift fonksiyon y-eks. göre simetrik.

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Örnek: $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}+x-1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

Çözüm:

$$x^2-3x-4 \geq 0 \qquad (x-4)(x+1)\geq 0$$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$D_f = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2-3x-4\geq 0\} = (-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$

aralığında tanımlıdır.

$f(-x)\neq f(x)$ $\quad f(-x)\neq -f(x)$ ne tek ne de çifttir.

Düşey asimptot tanım kümesinde olmayan ayrık tekil noktalarda arandığından düşey asimptot yoktur.

Tanım kümesi izin verdiği için yatay asimptot araştırabiliriz.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-3x-4}+x-1 = \infty+\infty=\infty$$

, $+\infty$ kolda yatay asimptot yoktur

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x-4}+x-1 = \infty-\infty$$ "Eşlenik ile çarpıp böldüm"

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x-4}+x-1\right)\left(\sqrt{x^2-3x-4}-x+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x-4}-x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-3x-4)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-3x-4}-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-5}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-x+1} = \frac{1}{2}$$

O halde $-\infty$ kolda

$y=\frac{1}{2}$ yatay asimptottur.

$+\infty$ kolda yatay asimptot olmadığından eğri (veya eğik) asimptot olabilir.

$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)+x-1 \Rightarrow y=2x-\frac{5}{2}$ yatay asimptot.

" $\sqrt{ax^2+bx+c}$ için asimptot $f(x)=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$, $a>0$ "

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x=0$ tanımlı değil y eksenini kesmez.

$y=0 \Rightarrow x=-5$ $\quad (-5,0)$

Ekstremum noktalarını bulalım.

$$f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}}+1=\frac{2x-3+2\sqrt{x^2-3x-4}}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$

$f'(x)=0$ için $\quad 2x-3+2\sqrt{x^2-3x-4}=0$

$$2x-3=-2\sqrt{x^2-3x-4}$$

$$4x^2-12x+9=4x^2-12x-16$$

$9=-16$ olup kök yok.

O halde ekstremumlar için türevin tanımsız olduğu noktalara bakabiliriz.

$x^2-3x-4\leq 0 \qquad (x-4)(x+1)\leq 0 \qquad [-1,4]$ dir.

Elde ettiğimiz bilgilerle tabloyu oluşturabiliriz.

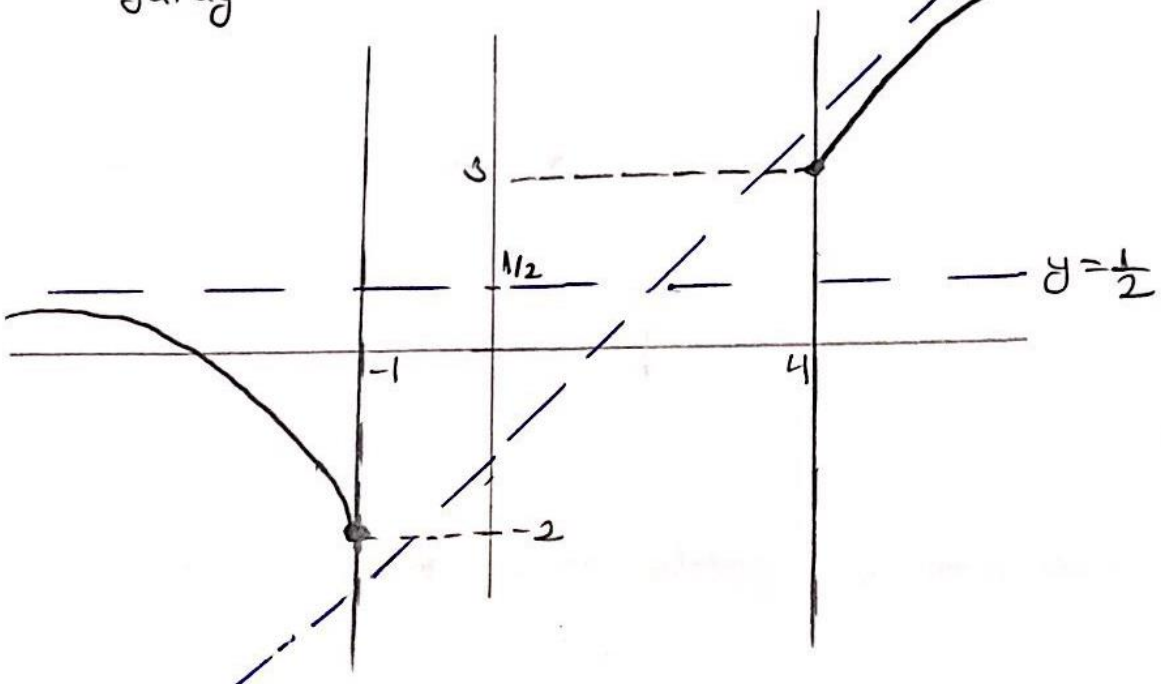
x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2		3	$\nearrow$	

$y = \frac{1}{2}$ yatay

$y = 2x - \frac{5}{2}$ eğik

$f(-1) = -2$

$f(4) = 3$



Örnek! $f(x) = \ln(-x^2+5x-4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

"$y = \log_a b$ için $b>0$, $a>0$ ve $a \neq 1$ dir"

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid -x^2+5x-4 > 0 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-4) < 0 \}$$
$$= (1,4)$$

x		1		4	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \to 1^+} \ln(-x^2+5x-4) = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} \ln(-x^2+5x-4) = \ln 0^+ = -\infty$$

Tanım kümesinden dolayı düşey asimptot ararız.

* Yine tanım kümesinde x leri ∞ 'a götürmek mümkün olmadığından yatay asimptot aranmaz.

* $x=0$ olamayacağından eğri y eksenini kesmez.

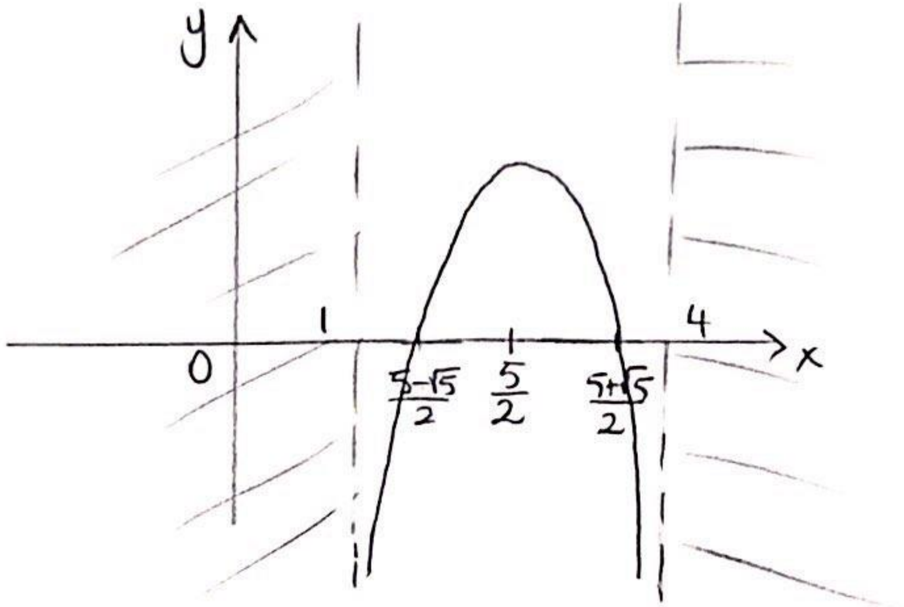
$y=0$ ise $\ln(-x^2+5x-4)=0$

$\Rightarrow -x^2+5x-4=1$

$\Rightarrow x^2-5x+5=0 \quad \Rightarrow x_1=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, \; x_2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

* $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{-x^2+5x-4} \quad \Rightarrow f'(x)=0 \quad \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

x	1		$\frac{5}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$



Örnek: $f(x) = \dfrac{e^{-x+2}}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u > 0$ dır.

$D_f = \{ x \mid x \in \mathbb{R} - \{0\} \}$

$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ ne tek ne de çifttir.

$x=0$ ı inceleyelim.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x+2}}{x} = \frac{e^2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x+2}}{x} = \frac{e^2}{0^-} = -\infty$$

$x=0$ çift taraflı düşey asimptottur.

Yatay asimptot

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\infty}}{\infty} = 0 \qquad y=0 \ +\infty \text{ kolda yatay asimptottur}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\infty}}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{"L.Hop"} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)\,e^{-x+2}}{1} = -\infty$$

$-\infty$ kolda yatay asimptot yoktur.

$-\infty$ kolda eğik asimptot bakabiliriz.

$y=cx+d$ eğik asimptot ise

$$c = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+2}}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)\,e^{-x+2}}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+2}}{2} = +\infty$$

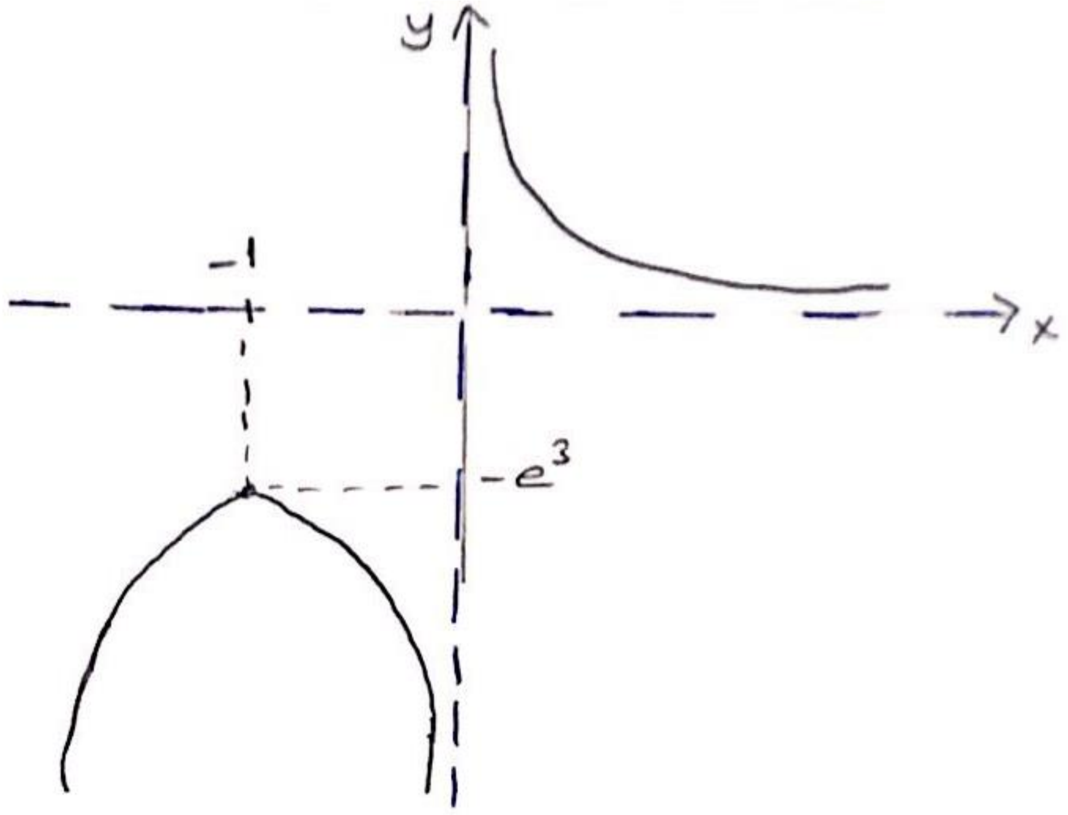
$-\infty$ kolda eğri asimptot yoktur.

$A(1, e)$, $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ kesim noktaları

$$f'(x) = \frac{-e^{-x+2} \cdot x - e^{-x+2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{-x+2}(-x-1)}{x^2} = 0$$

$x+1=0 \quad x=-1$, $x^2=0 \quad x_{1,2}=0$ tanımsız

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^3$	$\searrow$	$-\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	$y=0$


y
x
-1
-e^3

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersileri
Matematik II

Fonksiyonların Bükeyliği

(Konkav-Konveks)

Ders 3