ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Fonsiyonun
Ekstremum Değerleri

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Ders 1

FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİ

Bu bölümde verilen bir fonksiyonun türevinden yararlanarak bu fonksiyonun ekstremum değerlerini yani maksimum ve minimum değerlerinin ne olacağını ve bu değerleri aldığı noktaların nasıl belirleneceğini inceleyeceğiz.

Tanım: $f: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa, bu c noktasına fonksiyonun mutlak maksimum noktası, $f(c)$ değerine de fonksiyonun mutlak maksimum değeri denir.

Benzer şekilde $\forall x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ olacak şekilde $c \in D$ noktasına fonksiyonun mutlak minimum noktası, $f(c)$ değerine de fonksiyonun mutlak minimum değeri denir.

❗ UYARI : Verilen bir fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum değerleri olmak zorunda değildir. Yine bu değerlerden birisi olup, diğeri bulunmayabilir. Ayrıca fonksiyon mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini tanım kümesindeki birden çok noktada alabilirler. Şimdi bu söylediklerimizi örnekler üzerinde görmeye çalışalım.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunu alalım.
Bu fonksiyon mutlak maksimuma ve mutlak minimuma sahip değildir. Gerçekten; bu fonksiyon $x = c \in \mathbb{R}$ noktasında mutlak maksimuma sahip olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq f(c) = c$ olmalıydı Ancak $x = c + 1 \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = f(c+1) = c+1 > f(c) = c$$ olacağından

hiçbir $c \in \mathbb{R}$ noktası mutlak maksimum noktası olamaz.

Benzer düşünce ile $c \in \mathbb{R}$ noktası mutlak minimum noktası olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq f(c) = c$ olmalıydı.
Ancak

$$x = c - 2 \in \mathbb{R} \text{ için } f(x) = f(c-2) = c-2 < f(c) = c$$

olacağından hiçbir $c \in \mathbb{R}$ noktası mutlak minimum nokta olamaz.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon için $c=0$ noktası mutlak minimum noktasıdır. Gerçekten $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = x^2 \geq f(0) = 0 \text{ dır.}$$

Böylece bu fonksiyonun mutlak minimum noktası 0 dır. Ancak mutlak maksimum noktası yoktur.

Eğer mutlak maksimum noktası olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq f(c)$ olmalıydı. Ancak,

$$x = \sqrt{1+c^2} \text{ için } f(\sqrt{1+c^2}) = 1+c^2 > f(c) = c^2$$

olacağından bu fonksiyon mutlak maksimuma sahip değildir.

Örnek: $f:(0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

fonksiyonunu alırsak $\forall x\in(0,2]$ için $f(x)\le f(2)=4$ olduğundan $c=2$ fonksiyonun mutlak maksimum noktası, $f(2)=4$ fonksiyonun mutlak maksimum değeridir.

Ancak $\forall x\in(0,2]$ için $f(x)>0$ olup $f(x)\geqslant f(c)$ olacak şekilde $c\in(0,2]$ yoktur. Çünkü $f(0)=0$ ve $0\notin(0,2]$ dir. Böylece fonksiyonun mutlak minimumu yoktur.

Örnek: $f:(0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ fonksiyonunu alırsak $0<f(x)<4$ olur. Ancak $f(c)=0 \Rightarrow c=0\notin(0,2)$ ve $f(c)=4 \Rightarrow c=\mp 2\notin(0,2)$ olup fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktası yoktur.

Ekstremum değer teo için;

Bu teoremde f nin sürekli ve tanım kümesinin sınırlı aynı zamanda uç noktaları içerdiğine dikkat edilmelidir. Bunların sağlanmadığı durumda m ve M sayılarının varlığını garanti edemeyiz.

Yerel kelimesini kullanmamızın nedeni belirtilen özelliklerin c noktasının çok yakınında olduğunu, c den biraz uzaklaşıldığında bu özelliklerin sağlanamaya-bileceğini vurgulamak içindir.

Sonuç: Örneklerden kolayca görülüyor ki; eğer fonksiyonun tanım kümesi sınırsız ise veya yarı açık aralık ise mutlak maksimum veya mutlak minimum bulunmayabilir.

TEOREM (Ekstremum Değer Teo): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak maksimum değeri M ve mutlak minimum değeri m vardır. Yani $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ için

$f(c_1) = m$ ve $f(c_2) = M$ olmak üzere

$m \leq f(x) \leq M$ sağlanır.

Verilen bir fonksiyonun tanım kümesine ait olan bir noktanın uygun bir komşuluğunda maksimum veya minimum değerleri bulunabilir. Bunlar yerel maksimum ve yerel minimum olarak ifade edilirler. Şimdi bu kavramları inceleyelim

Tanım: $f: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun. c noktasının tanım kümesi dışına çıkmayan uygun bir komşuluğundaki tüm x noktaları için,

$f(x) \leq f(c)$ oluyorsa bu c noktasına yerel maksimum nokta, $f(c)$ değerine de yerel maksimum değer denir.

Benzer şekilde c noktasını içeren bir açık aralıktaki

$\forall x$ için $f(x) \geq f(c)$ ise bu c noktasına

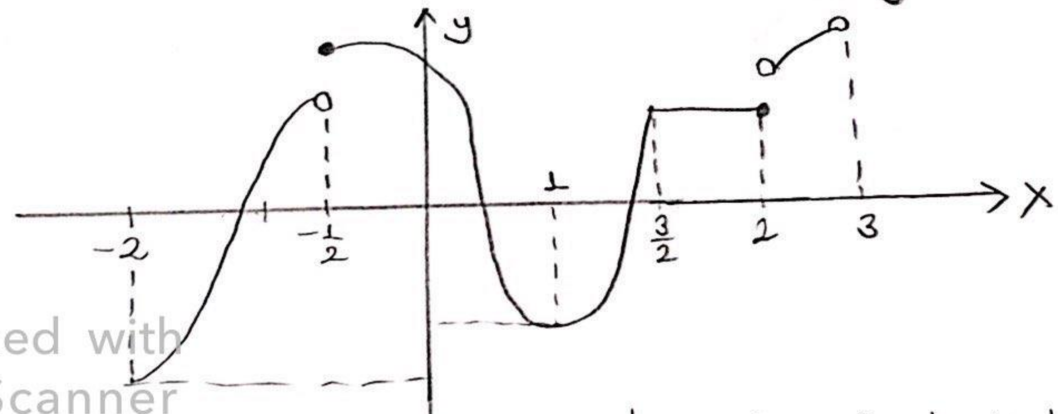
yerel minimum nokta, $f(c)$ değerine de yerel minimum

değer denir.

Burada c nin bir δ komşuluğunu $U_\delta(c)$ ile gösterebiliriz.

NOT! Bir fonksiyonun grafiği üzerinden mutlak veya yerel maksimum, minimum değerlerini belirleyebiliriz.

Örnek! $f: [-2, 3) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği



CS Scanned with CamScanner

olsun. Yerel ekstremum değerlerini belirleyelim

$\forall x \in U_\delta(-2)$ icin $f(x) \geq f(-2)$ oldugundan $x=-2$ yerel minimum noktasıdır.

$\forall x \in U_\delta(-\frac{1}{2})$ icin $f(x) \leq f(-\frac{1}{2})$ oldugundan $x=-\frac{1}{2}$ yerel maksimum noktasıdır.

$x=1$ yerel minimum noktasıdır.

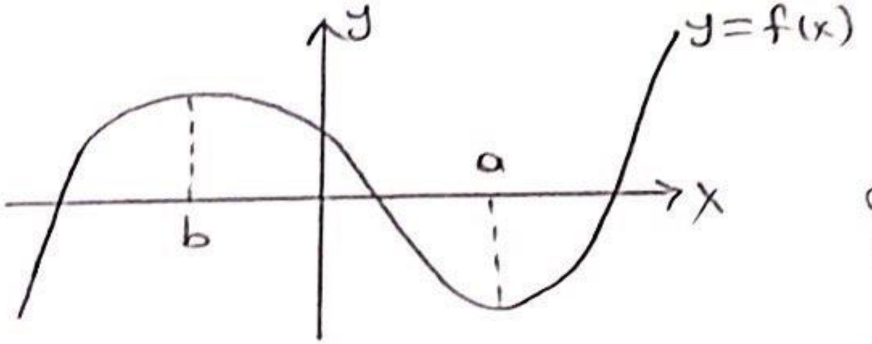
$\forall x \in U_\delta(\frac{3}{2})$ icin $f(\frac{3}{2}) \geq f(x)$ olup $x=\frac{3}{2}$ yel maksimum noktasıdır.

$x=2$ yerel minimumdur.

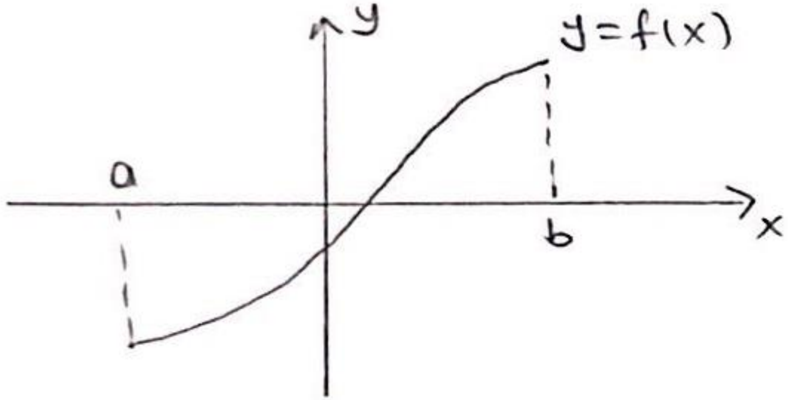
$x=3$ icin $x \notin [-2,3)$ icin ekstremum noktasından bahsedilemez.

UYARI: Yerel maksimum ve yerel minimum noktaları mutlak maksimum veya mutlak minimum noktası olmak zorunda değildir. Fakat mutlak maksimum ve minimum noktaları aynı zamanda yerel maksimum ve yerel minimumdur.

Örnek:



f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktası b, yerel minimum noktası a dır. Ancak mutlak maksimum ve minimum noktası yoktur.



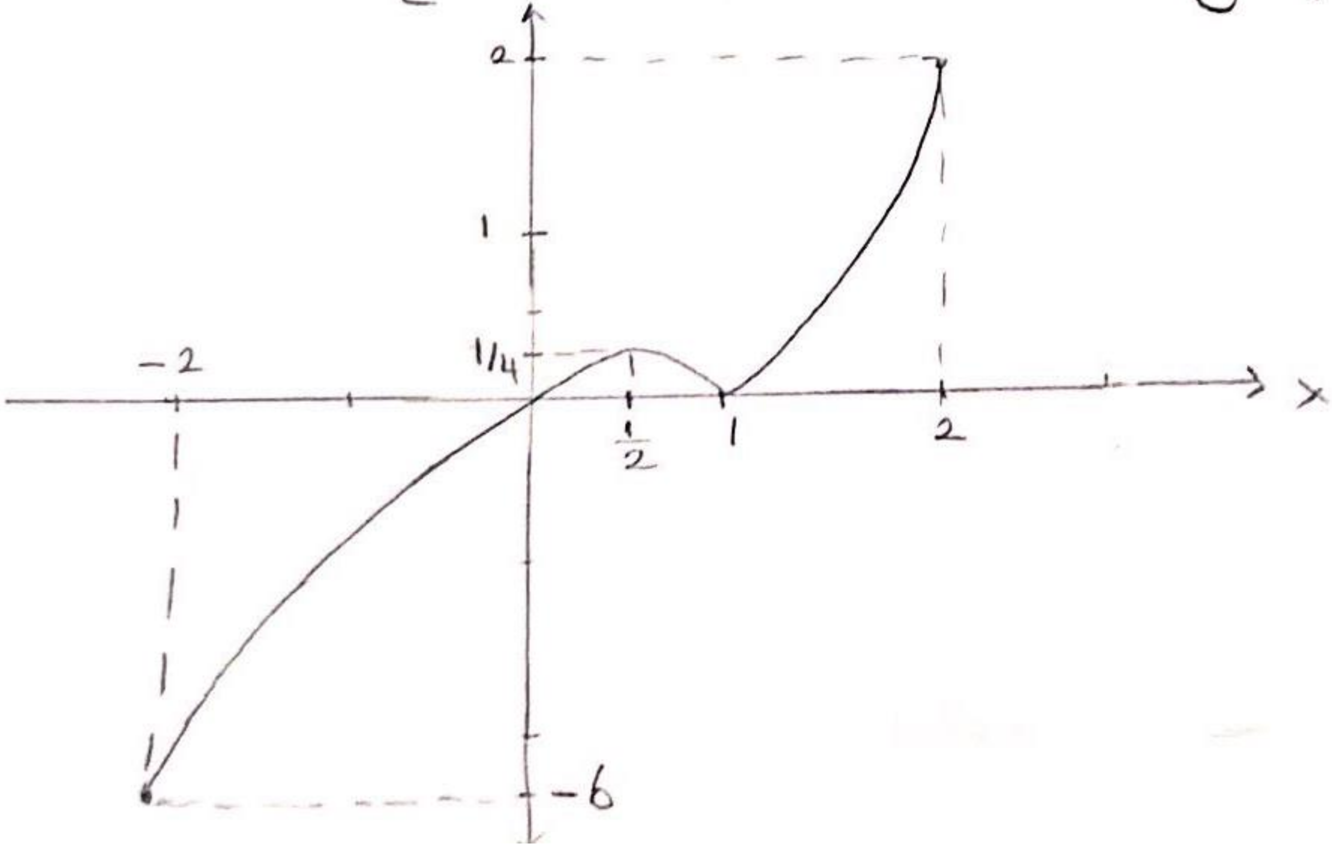
mutlak maksimum
yerel maksimum } b

mutlak minumum
yerel minimum } a

UYARI: [a,b] de tanımlı fonksiyonun aralığın uç noktalarındaki ekstremum değerleri incelenirken a noktasının sağında yani $a \leq x < a+\delta$ ve b noktasının solunda yani $b-\delta < x \leq b$ olan x noktaları için inceleme yapılır.

Örnek: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x-1|$ fonksiyonunun varsa mutlak veya yerel ekstremumlarını inceleyiniz

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x \geq 1 \\ -x^2 + x & , \quad x < 1 \end{cases}$$ fonksiyonunun grafiği ;



Grafiğe göre $\forall x \in [-2,2]$ için $-6 \leq f(x) \leq 2$ olur. Böylece $x=-2$ mutlak minimum, $x=2$ mutlak maksimum nokta olur. Bunların dışında

$x=\frac{1}{2}$ noktası için $\forall x \in (0,1)$ olduğunda $f(x) \leq f(\frac{1}{2})$ olup $x=\frac{1}{2}$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

$x=1$ noktası için $\forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ olduğunda $f(x) \geq f(1)$ olup $x=1$ yerel minimum noktasıdır.

Şimdi türev yardımıyla ekstremum noktaların nasıl belirlenebileceğini inceleyelim.

TEOREM (FERMAT TEOREMİ): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c\in(a,b)$ noktasında yerel minimum veya yerel maksimuma sahip olsun. Eğer f fonksiyonu bu c noktasında türevlenebilir ise $f'(c)=0$ dır.

Dikkat edilirse fermat teoremi bize ekstremum noktaları buldurmuyor. Ancak bu noktaların nerede aranacağına dair ipucu veriyor. Yine bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani $f'(c)=0$ olan c noktalarının ekstremum nokta olmaları gerekmez.

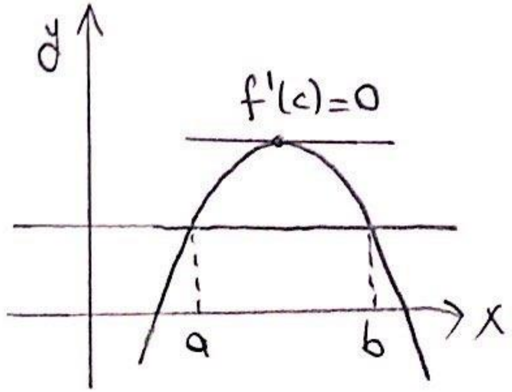
Örnek! $f(x)=x^3$ fonksiyonunu alalım. $f'(x)=3x^2$ olup $c=0$ için $f'(c)=0$ olur. Ancak 0'ı içeren hangi açık aralık alınırsa alınsın bu aralıkta hem pozitif hem de negatif sayılar vardır. O halde $f(x)>0$ ve $f(x)<0$ olan x noktaları olduğundan $c=0$ türevi sıfır yapmasına rağmen ekstremum nokta değildir.

Böylece Fermat teoremi de dikkate alınırsa bir f fonksiyonunun ekstremumları, türevi sıfır yapan iç noktalarda, f nin türevinin olmadığı noktalarda ve tanım kümesinin uç noktalarında araştırılmalıdır. Bu noktalar kritik noktalar olarak ifade edilirler.

TEOREM (ROLLE TEOREMİ): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır.

Burada özel olarak $f(a)=f(b)=0$ alınırsa Rolle teoremini şöyle ifade edilebilir; f fonksiyonunun herhangi iki kökünün arasında türevinin de bir kökü vardır.

Geometrik Yorumu: Eğer türevlenebilen bir fonksiyon yatay bir doğruyu farklı iki noktada kesebiliyor ise bu noktalar arasında eğrinin teğetinin x-eksenine paralel olduğu ve türevin sıfır olduğu en az bir nokta vardır.



Örnek! $f(x) = x^3+3x+1$ fonksiyonunun Reel sayılarda bir tek kökünün olduğunu gösteriniz.

Aradeğer teo, $f(-1) = -3 < 0$, $f(1) = 5 > 0$ $[-1,1]$ de en az bir kökü var.

Çözüm! Kabul edelim ki f fonksiyonunun a ve b gibi iki farklı reel kökü olsun. Bu durumda

$f(a) = 0$ ve $f(b) = 0$ dır.

f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ olduğundan Rolle teoremi gereğince $f'(c) = 0$ olacak şekilde $\exists\, c \in (a,b)$ vardır. Ancak

$f'(x) = 3x^2+3$ $\quad f'(c) = 3c^2+3 = 0$ olacak şekilde

c yoktur. Bu ise çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır.

f fonksiyonunun bir tek reel kökü vardır.

Örnek: $r(\theta) = \theta + \sin^2 \frac{\theta}{3} - 8$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $(-\infty, \infty)$ aralığında bir tek kökünün olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eğer $r(\theta) = 0$ denkleminin birden çok kökü olsaydı Rolle teoremi gereğince iki kökünün arasında türevinin de bir kökü olmalıydı.

$$r'(\theta) = 1 + \frac{2}{3} \sin \frac{\theta}{3} . \cos \frac{\theta}{3} = 1 + \frac{1}{3} \sin \frac{2\theta}{3}$$

$$r'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin \frac{2\theta}{3} = -3$$

Bu ise mümkün olamayacağından $r(\theta) = 0$ denkleminin bir tek kökü vardır.

Örnek: $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ fonksiyonunun türevinin köklerі hangi aralıkta bulunur.

Çözüm: f türevlenebilir fonksiyon olup Rolle teoremini kullanabiliriz.

$f(1)=f(2)$ olduğundan $1<c_1<2$ için $f'(c_1)=0$

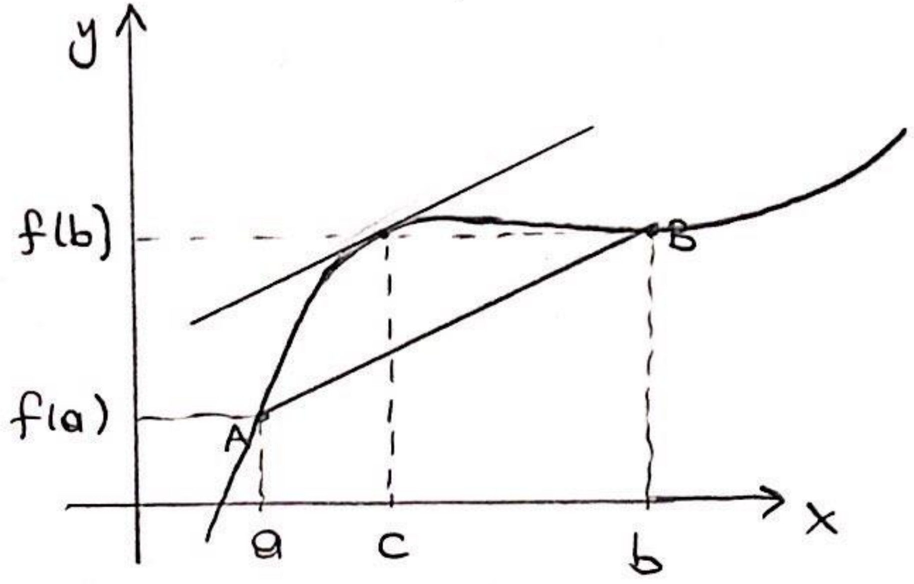
$f(2)=f(3)$ 〃 $2<c_2<3$ için $f'(c_2)=0$

f', 2. dereceden olduğundan en çok 2 kökü vardır. Bu kökler $[1,3]$ aralığındadır.

TEOREM (ORTALAMA DEĞER TEOREMİ): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli (a,b) açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda $\exists c\in(a,b)$ için

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ olur.}$$

Geometrik Yorumu: a ve b arasındaki bir c noktasından çizilen teğet $(a, f(a))$ noktasını $(b, f(b))$ noktasına birleştiren kirişe paraleldir.



Örnek: $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$ fonksiyonu için ortalama değer teo. sağlayan c sayısını bulunuz.

f fonksiyonu $[0,2]$ de sürekli, $(0,2)$ de türevlenebilir $f'(x)=3x^2-3$ olup

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0} \Rightarrow 3c^2-3=1 \qquad c=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}\notin(0,2)$ olduğundan $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ dür.

Örnek: $f: [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 6x-x^2-7, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

fonksiyonu ortalama değer teoremini sağlar mı?

Çözüm:

f; $[0,3]$ de sürekli, $(0,3)$ de türevli olmalıdır.

$x=2$ noktası için süreklilik ve türevlenebilmeyi inceleyelim.

$$\lim_{x\to 2^-} 2x-3 = 1 = \lim_{x\to 2^+} 6x-x^2-7 = f(2)$$

olduğundan f, $[0,3]$ de süreklidir.

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{6x-x^2-7-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{6-2x}{1} = 2$$

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} 2 = 2$$

$f'(2^+) = f'(2^-) = 2$ olup f fonksiyonu $(0,3)$ de türevlenebilirdir. Ortalama değer teo. şartlarını sağlar.

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{5}{3}$$

$$f'(c) = 2 \neq \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow c \in (0,2)$ yoktur.

$$f'(c) = 6-2c = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{13}{6}$$ olup $c \in (2,3)$ dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersileri
Matematik II
Fonsiyonun Ekstremum Değerleri

Ders 1