ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 18

ÖZEL EĞRİLER

Helisler (Eğilim Çizgileri)

E^3 de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, sabit bir U birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa M eğrisine bir helis veya eğilim çizgisi U ya da helisin ekseni denir.

Teorem 24. $\alpha: I \to E^3$ eğrisi verilsin. $\kappa > 0$ olmak üzere α eğrisinin helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart, $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olmasıdır. Burada κ ve τ, α eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır.

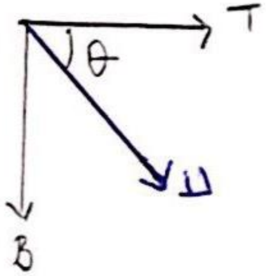
İspat:

$(\Rightarrow)$ $\alpha: I \to E^3$ eğrisi bir helis ve $s \in I$ da yay-parametresi olsun. O halde $\forall s \in I$ için α nın teğet vektörü T ve U da sabit bir birim vektör olmak üzere T ile U arasındaki θ açısı için $\theta =$ sabittir.

$\Rightarrow \langle T, U \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$. Türev alınırsa,

$$\langle T', U \rangle + \langle T, U' \rangle = 0 \Rightarrow \langle T', U \rangle = 0 \Rightarrow \kappa \langle N, U \rangle = 0$$

$\kappa > 0$ olduğundan $\langle N, U \rangle = 0$ bulunur. O halde $U \in Sp\{T, B\}$ dir.



$$\Rightarrow U = \lambda_1 T + \lambda_2 B, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\langle U, T \rangle = \lambda_1 = \cos\theta$$

$$\langle U, B \rangle = \lambda_2 = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \text{ dır.}$$

$\Rightarrow U = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B$ bulunur.

$U' = 0$ olduğundan $\cos\theta\, T' + \sin\theta\, B' = 0 \Rightarrow \cos\theta\, \kappa N - \sin\theta\, \varepsilon N = 0$

Böylece $(\kappa \cos\theta - \varepsilon \sin\theta) N = 0$ ve dolayısıyla $\kappa \cos\theta - \varepsilon \sin\theta = 0$

buradan da $\dfrac{\varepsilon}{\kappa} = \cot\theta = \text{sabit}$ bulunur.

($\Leftarrow$) $\frac{\tau}{\kappa}$ = sabit olsun. α nın helis olduğunu yani her noktasındaki T teğetinin sabit bir birim vektör ile yaptığı açının sabit olduğunu göstereceğiz:

θ = sabit olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta$ = sabit olsun.

$\Rightarrow \kappa\cos\theta - \tau\sin\theta = 0$ dır.

$U = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B$ vektörünü alalım. $\|U\| = 1$ olup U birim vektördür.

Ayrıca; $U' = \cos\theta\, T' + \sin\theta\, B' = \cos\theta\, \kappa N - \sin\theta\, \tau N = (\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta)N = 0$

olup U sabit bir birim vektördür.

$\forall s \in I$ için $\langle U, T\rangle = \langle \cos\theta\, T + \sin\theta\, B, T\rangle = \cos\theta$ = sabit olur.

$\Rightarrow \alpha$, helistir.

Not:

1) $\kappa = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir doğrudur,

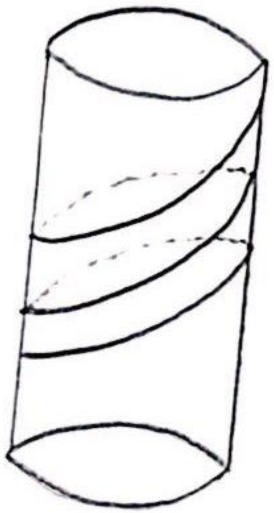
2) $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir düzlem eğrisidir,

3) κ = sabit > 0 ve $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir çember parçasıdır,

4) κ = sabit > 0 ve τ = sabit $\Leftrightarrow \alpha$ bir dairesel helistir,

5) $\frac{\tau}{\kappa}$ = sabit $\Leftrightarrow \alpha$ bir silindirik helistir.

Not: Silindirik helis herhangi bir silindir üzerine çizili helistir. Bu helis, silindirin paralel anadoğruları ile sabit açı yapar. Dairesel helis ise dik dairesel silindir üzerine çizili helistir.



Dairesel helis

Örnek: $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ eğrisinin helis olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\alpha'(t) = (6, 6t, 3t^2) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = 3t^2 + 6 \neq 1$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{18(t^2+2)}{(3t^2+6)^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{216}{18^2 (t^2+2)^2}$$

$\Rightarrow \dfrac{\tau}{\kappa} = 1$ olup α helistir.

Örnek: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart, $\det(\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{iv}(s)) = 0$ olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm:

$s \in I$ yay parametresi olsun.

$$\Rightarrow \alpha' = T \Rightarrow \alpha'' = \kappa N \Rightarrow \alpha''' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B$$

$$\Rightarrow \alpha^{iv} = -3\kappa\kappa' T + (-\kappa^3 + \kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B$$

$$\Rightarrow \det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{IV}) = \begin{vmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2 & \kappa' & \kappa\tau \\ -3\kappa\kappa' & -\kappa^3+\kappa''-\kappa\tau^2 & 2\kappa'\tau+\kappa\tau' \end{vmatrix}$$

$$= 2\kappa'\kappa^3\tau + \kappa^4\tau' - 3\kappa'\kappa^3\tau$$

$$= \kappa^4\tau' - \kappa'\kappa^3\tau$$

$$= \kappa^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \text{ bulunur.}$$

($\Rightarrow$) α helis ise $\frac{\tau}{\kappa}=0$ olacağından $\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{IV})=0$ olur.

($\Leftarrow$) $\det(\alpha'',\alpha''',\alpha^{IV})=0$ ise $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'=0$ olup $\frac{\tau}{\kappa}=$ sabittir. O halde α helistir.

Not: Yukarıdaki örnek, parametre yay-parametresi olmadığında da geçerlidir.

Çünkü $\det(\alpha''(s),\alpha'''(s),\alpha^{IV}(s)) = \det\left(\frac{d\alpha'}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}, \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{d\alpha'''}{dt}\frac{dt}{ds}\right)$

$$= \frac{dt}{ds}\det(\alpha''(t),\alpha'''(t),\alpha^{IV}(t)) \text{ dir.}$$

Örnek: $\alpha(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3\right)$ eğrisi helistir.

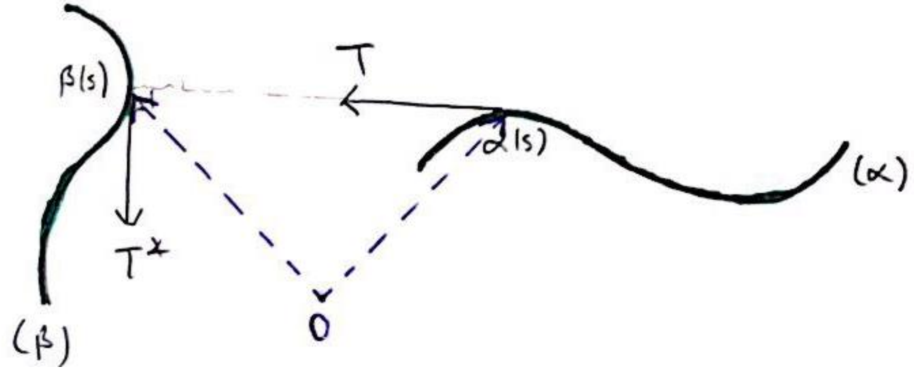
İnvolüt_Evolüt Eğri Çifti

$M,N \subset E^3$ eğrileri (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. M ve N nin $\alpha(s)\in M$ ve $\beta(s)\in N$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırası ile, $\{T(s),N(s),B(s)\}$ ve $\{T^*(s),N^*(s),B^*(s)\}$ olsun. Eğer $\forall s\in I$ için $\langle T(s),T^*(s)\rangle = 0$ ise N ye M nin involütü, M ye N nin evolütü, (M,N) ikilisine de involüt-evolüt eğri çifti denir.

Teorem 25. $M,N \subset E^3$ eğrileri (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. (M,N) involüt-evolüt eğri çifti ise $\forall s\in I$ için

$$d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|, \quad c = \text{sabit dir.}$$

İspat:



$s\in I$ α nın $s^*\in I$ da β nın yay parametresi olsun. (M,N) involüt-evolüt eğri çifti için şekilden,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s) \text{ dir.}$$

$$\beta(s)=\alpha(s)+\lambda T(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}+\frac{d\lambda}{ds}T+\lambda\frac{dT}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{ds}=T+\frac{d\lambda}{ds}T+\lambda(\kappa N) \Rightarrow \frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=\left(1+\frac{d\lambda}{ds}\right)T+\lambda\kappa N$$

$$\Rightarrow T^*\frac{ds^*}{ds}=\left(1+\frac{d\lambda}{ds}\right)T+\lambda\kappa N$$

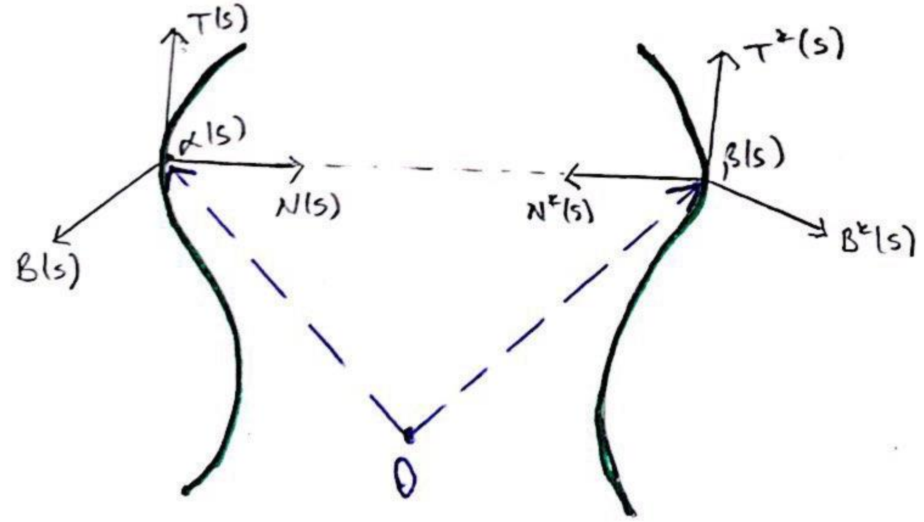
(α,β) involüt – evolüt eğri çifti olduğundan $\langle T^*,T\rangle=0 \Rightarrow \langle T^*\frac{ds^*}{ds},T\rangle=0$

$$\Rightarrow 1+\frac{d\lambda}{ds}=0 \Rightarrow \frac{d\lambda}{ds}=-1 \Rightarrow \lambda=-s+c \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
d(\alpha(s),\beta(s)) &= \|\overrightarrow{\alpha(s)\beta(s)}\| \\
&= \|\beta(s)-\alpha(s)\| \\
&= \|\alpha(s)+\lambda T(s)-\alpha(s)\| \\
&= |\lambda| \\
&= |c-s| \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Bertrand Eğri Çifti

$M, N \subset E^3$ eğrileri (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. $\{N(s), N^*(s)\}$ kümesi lineer bağımlı ise (M,N) ikilisine Bertrand eğri çifti denir. $\{N(s), N^*(s)\}$ nin lineer bağımlı olması demek, $N(s) = N^*(s)$ veya $N(s) = -N^*(s)$ olması demektir.



(M,N) Bertrand eğri çifti ise şekilden

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

yazılabilir.

Teorem 26. Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat:

$M, N \subset E^3$ eğrileri (I,α) ve (I,β) ile verilsin. (M,N) Bertrand eğri çifti olsun. $\forall s \in I$ için $d(\alpha(s),\beta(s)) = \text{sabit}$ olduğunu göstereceğiz:

α nın yay-parametresi $s \in I$, β nın yay-parametresi de $s^* \in I$ olsun.

şekilden, $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$ dir. s ye göre türev alınırsa,

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}N(s) + \lambda\frac{dN}{ds} \Rightarrow \frac{d\beta}{ds} = T(s) + \frac{d\lambda}{ds}N(s) + \lambda\left(-\kappa T(s) + \tau B(s)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = (1-\lambda\kappa)T(s) + \frac{d\lambda}{ds}N(s) + \lambda\tau B(s)$$

$$\Rightarrow T^*(s)\frac{ds^*}{ds} = (1-\lambda\kappa)T(s) + \frac{d\lambda}{ds}N(s) + \lambda\tau B(s) \ldots (*) \text{ bulunur.}$$

(M,N) Bertrand eğri çifti olduğundan $N^*(s) = \lambda N(s)$ alınabilir.

$\langle T^*(s), N^*(s)\rangle = 0$ dan $\langle T^*(s), N(s)\rangle = 0$ buradan da $\langle T^*(s)\frac{ds^*}{ds}, N(s)\rangle = 0$

olur. (*) dan $\frac{d\lambda}{ds}=0$ buradan da $\lambda=$sabit elde edilir.

$\forall s\in I$ için $d(\alpha(s),\beta(s))=\|\overrightarrow{\alpha(s)\beta(s)}\|=\|\beta(s)-\alpha(s)\|=\|\alpha(s)+\lambda N(s)-\alpha(s)\|=|\lambda|=$sabit

bulunur.

Teorem 27. Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörleri arasındaki açı sabittir.

İspat:

$M,N\subset E^3$ eğrileri (I,α) ve (I,β) ile verilsin. (M,N) Bertrand eğri çifti olsun. $\forall s\in I$ için $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarındaki teğet vektörleri, sırası ile, $T(s)$ ve $T^*(s)$ olmak üzere $T(s)$ ile $T^*(s)$ arasındaki açıyı θ olarak alalım.

$$\frac{d}{ds}\langle T(s),T^*(s)\rangle=\langle \frac{dT}{ds},T^*\rangle+\langle T,\frac{dT^*}{ds}\rangle$$

$$=\langle \kappa N,T^*\rangle+\langle T,\frac{dT^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\rangle$$

$$=\kappa\langle \underbrace{N,T^*}_{N^*}\rangle+\langle T,\kappa^*\underbrace{N^*}_{N}\frac{ds^*}{ds}\rangle$$

$$=0 \quad\Rightarrow \langle T(s),T^*(s)\rangle=\cos\theta=\text{sabit}\Rightarrow\theta=\text{sabit olur.}$$

Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri

Teğetler Göstergesi: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin bir $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. $\forall s \in I$ için α nın $T(s)$ teğet vektörünün S^2 birim küresi (0 merkezli, 1br yarıçaplı küre) üzerinde çizdiği eğriye α nın teğetler göstergesi denir. Teğetler göstergesi, (T) veya (α_T) ile gösterilir.

α nın yay-parametresi s, α_T nin yay-parametresi s_T olmak üzere α_T teğetler göstergesinin denklemi $\boxed{\alpha_T(s_T) = T(s)}$ dir.

α_T nin yay-uzunluğu için $s_T = \int \left\| \frac{d\alpha_T}{ds} \right\| ds$

$$\Rightarrow ds_T = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| ds \Rightarrow ds_T = \kappa\, ds \text{ yazılabilir.}$$

Asli Normaller Göstergesi: $\forall s \in I$ için α eğrisinin $N(s)$ asli normalinin S^2 birim küresi üzerinde çizdiği eğriye α nın asli normaller göstergesi denir ve (N) veya (α_N) ile gösterilir. Denklemi $\boxed{\alpha_N(s_N) = N(s)}$ şeklindedir.
Burada $s \in I$, α nın $s_N \in I$, (α_N) nin yay parametresidir.

Binormaller Göstergesi: $\forall s \in I$ için α eğrisinin $B(s)$ binormalinin S^2 birim küresi üzerinde çizdiği eğriye α nın binormaller göstergesi denir ve (B) veya (α_B) ile gösterilir. Denklemi $\boxed{\alpha_B(s_B) = B(s)}$ şeklindedir.
Burada $s \in I$, α nın $s_B \in I$, (α_B) nin yay parametresidir.

Örnek: $\alpha(t) = (t, \sin t, \cos t)$ eğrisinin teğetler gösterge eğrisinin T, N, B Frenet vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$\alpha'(t) = (1, \cos t, -\sin t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} \neq 1$

$\Rightarrow T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos t, -\sin t)$ olur.

O halde α nın teğetler göstergesinin denklemi,

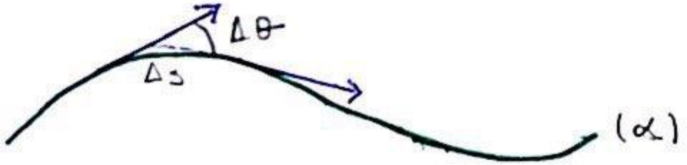
$$\beta(t)=T(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\cos t,\sin t) \text{ olur.}$$

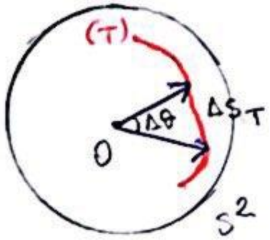
$$\beta'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-\sin t,\cos t) \Rightarrow \|\beta'(t)\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 1$$

$$\Rightarrow T(t)=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|}=(0,-\sin t,\cos t)$$

$$B(t)=\frac{\beta'\wedge\beta''}{\|\beta'\wedge\beta''\|}=(1,0,0),\quad N(t)=B(t)\wedge T(t)=(0,\cos t,\sin t) \text{ bulunur.}$$

Kotangent Açısı: $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin komşu iki teğet vektörü arasındaki $\Delta\theta$ açısına kotangent açısı denir.





Teorem 28. α nın komşu iki teğeti arasındaki $\Delta\theta$ açısı için $\dfrac{d\theta}{ds}=\kappa$ dır.

İspat:

(α_T) teğetler göstergesinin yay-uzunluğu s_T olmak üzere, $\dfrac{ds_T}{ds}=\kappa$ olduğunu biliyoruz.

$$\frac{d\theta}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s_T}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s_T}{\Delta s}$$

Δs_T küre üzerinde çember yayıdır. $\Delta\theta$ da bu yayı gören merkez açı olup $\Delta\theta=\Delta s_T$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\underbrace{\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta}}_{1}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s_T}{ds}=\frac{ds_T}{ds}=\kappa \text{ olur.}$$

Teorem 29. α eğrisinin komşu iki binormali arasındaki $\Delta\theta$ açısı için

$$\frac{d\theta}{ds}=\tau \text{ dır.}$$

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Özel Eğriler

Ders 18