UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

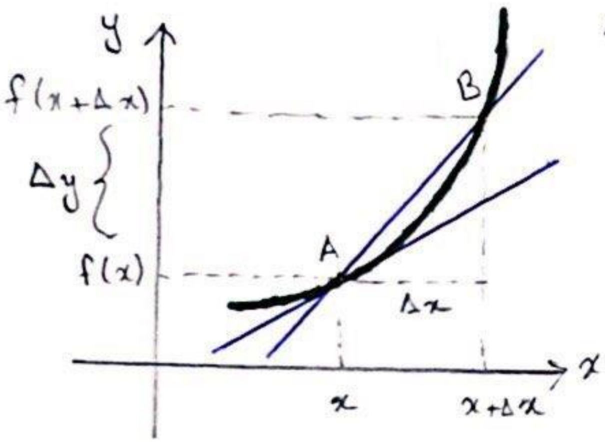
DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 16

DÜZLEMDE EĞRİLER

Hatırlatma: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir noktasındaki türevi, fonksiyonun grafiğine o noktada çizilen teğetin eğimine eşittir.



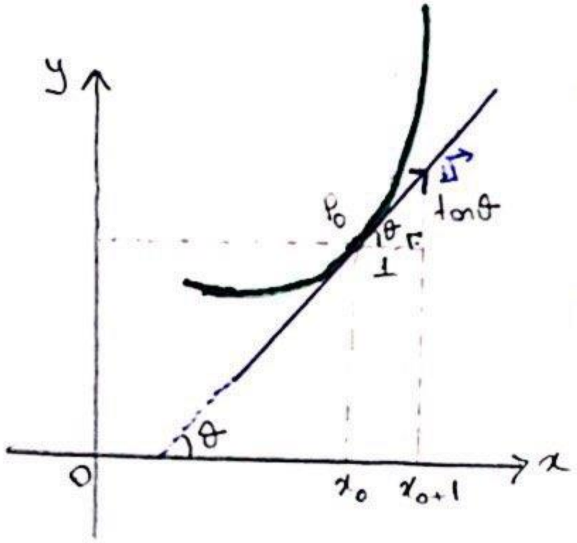
AB doğrusunun eğimi $m_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dir. $\Delta x \to 0$ olduğunda B noktası A ya yaklaşacak ve AB doğrusu eğrinin A daki teğeti konumuna gelecektir. Yani

$$m_{teğet} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{dx}$$

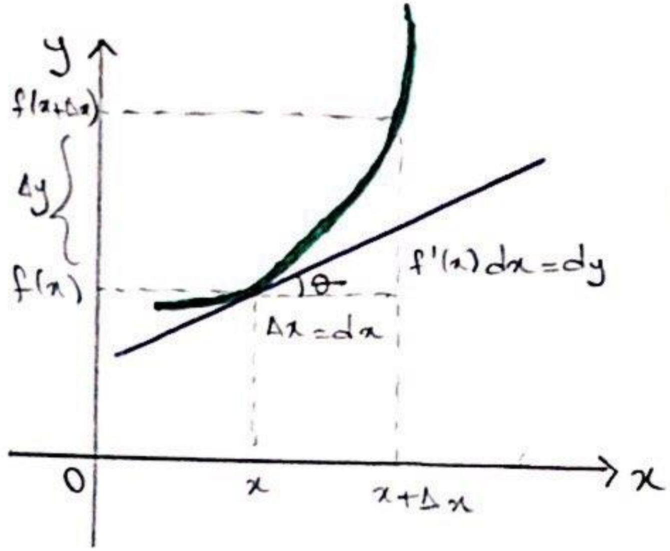
$$= f'(x)$$

olur. O halde eğrinin $x = a$ daki teğetinin eğimi $m_t = f'(a)$ dır.



P_0 noktasında, $y' = m_t = \tan\theta$ dır. O halde y', x'i 1 birim değiştirdiğimizde eğrinin teğetinin y sinde meydana gelen değişimi verir.

Hatırlatma:

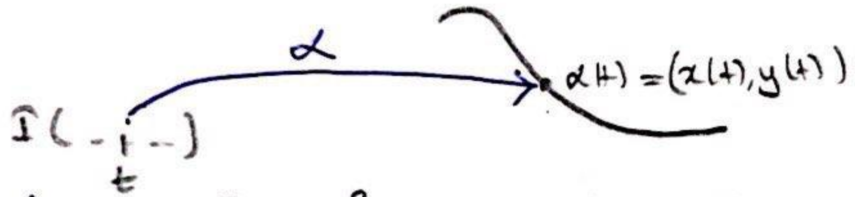


Δx ve dx aynı büyüklüğü gösteren kavramlar olmasına rağmen Δy ile dy farklıdır. Δy, x'e Δx artımı verildiğinde bize eğrideki değişimi verirken dy ise teğet boyunca olan değişimi vermektedir.

Düzlemde eğri kavramı: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^2$ türevlenebilir

$$t \to \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $\alpha(I) \subset E^2$ alt kümesine E^2 de bir eğri adı verilir. α nın türevlenebilir olması $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının türevlenebilir olması demektir.



Örnek: $\alpha : I \to E^2$, $\alpha(t) = (t, at^2)$ fonksiyonu E^2 de parabol belirtir.
Bu eğriyi parametrik olarak $\begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases}$, parametreyi yok edip açık fonksiyon biçiminde $y = ax^2$ ve kapalı fonksiyon şeklinde de $F(x,y) = y - ax^2 = 0$ olarak ifade edebiliriz.

Örnek: $\alpha : I \to E^2$, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t)$ E^2 de çember belirtir.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \rightarrow \text{çemberin parametrik denklemi}$$

$y = \mp\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow$ çemberin açık denklemi

$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow$ çemberin kapalı denklemi

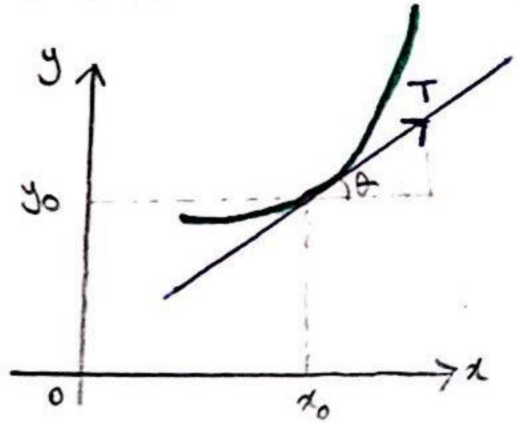
Yay Uzunluğu: $\alpha : I \rightarrow E^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğunun $s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ olduğunu biliyoruz.

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|d\alpha\| = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

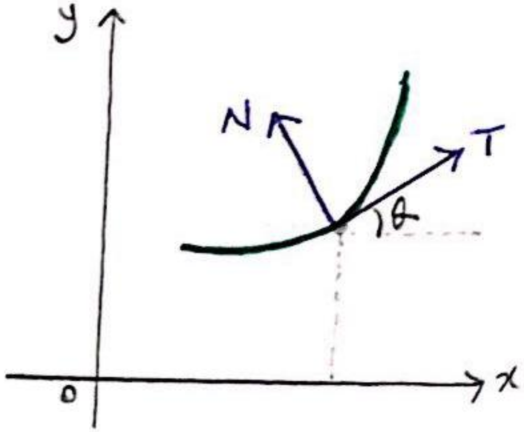
bulunur. Bunun $y = f(x)$ eğrisinin yayının uzunluğunun bulunması için Analiz derslerinde elde edilen formül ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

Düzlemde bir eğrinin teğeti ve asli normali

Düzlemde yay-parametreli bir $\alpha(s)=(x(s),y(s))$ eğrisi verilsin. Eğrinin teğeti doğrultusundaki birim vektör T olsun. θ, eğrinin teğetinin x ekseniyle yaptığı açı olmak üzere,



$T=(\cos\theta,\sin\theta)$ dır. Burada $T=\alpha'(s)$ olacağından $x'(s)=\cos\theta$, $y'(s)=\sin\theta$ olacaktır.



T ye dik olan ikinci vektör N olup N ye asli normal vektör denir. k düzlemin normali olmak üzere $N=k\wedge T$ eşitliğiyle hesaplanır. (Eğrinin normali, teğetinin saat yönünün tersi yönünde $\frac{\pi}{2}$ radyan döndürülmesiyle bulunur)

$\Rightarrow N=(-\sin\theta,\cos\theta)$ dır.

Not: Düzlemde $\{T,N\}$, $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ nin rolüne benzer bir rol oynar. Bir noktanın konumunu $\vec{e_1}$ ve $\vec{e_2}$ ile tanımlayabildiğimiz gibi T ve N de eğrileri tanımlamamızı sağlar. T, eğrinin teğetinin yönünü verir. N de eğrinin ne tarafa doğru kıvrıldığını gösterir.

Not:

1) $s\in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)=(x(s),y(s))$ eğrisi için $T(s)=\alpha'(s)$ dir.

$\|T\|=1=\text{sabit} \Rightarrow \langle T,T\rangle=1 \Rightarrow \frac{d}{ds}\langle T,T\rangle=0 \Rightarrow \langle T,T'\rangle=0$ olup

Asli normal $N(s)=\dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ olur.

2) $t\in I$ herhangi bir parametre ise $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ eğrisi için $\|\alpha'(t)\|\neq 1$ olacağından $T(t)=\alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ ve $N(t)=T'(t)/\|T'(t)\|$ olacaktır.

Örnek: $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t)$ için $T(t)=(-\sin t,\cos t)$, $N(t)=(-\cos t,-\sin t)$ dir.

Düzlem Eğrisinin Eğriliği

Bir düzlem eğrisinin eğriliği, basitçe eğrinin bir doğrudan ne kadar farklı olduğunun bir ölçüsüdür. Eğrilik, teğetin doğrultusunun eğri yönündeki değişimini ölçer.

Yay parametreli eğrinin eğriliği : $\alpha(s)=(x(s),y(s))$ eğrisi yay parametreli eğri olsun. $\|\alpha'(s)\|=1$ olacağından $x'^2+y'^2=1$ dir. θ, eğrinin teğetinin x ekseniyle yaptığı açı olmak üzere $x'=\cos\theta$, $y'=\sin\theta$ olmalıdır. Eğrinin eğriliği basitçe $\kappa=\frac{d\theta}{ds}$ ile tanımlanır. Yukarıdan

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds} = -\kappa\sin\theta \\ y'' &= \cos\theta\,\frac{d\theta}{ds} = \kappa\cos\theta \end{aligned}\right\}\ \kappa = -\frac{x''}{y'} = \frac{y''}{x'}$$

bulunur. $x'^2+y'^2=1$ olduğundan x' ve y' nün ikisi birden aynı anda sıfır olamaz. O halde $\kappa=-\frac{x''}{y'}=\frac{y''}{x'}$ ifadelerinden en az biri eğri üzerindeki her noktada geçerlidir. İlk bakışta aynı κ ifadesi için iki farklı eşitlik elde edilmiş gibi görünebilir. Fakat gerçekte böyle değildir:

$x'^2+y'^2=1$ den türev alınırsa $2x'x''+2y'y''=0$

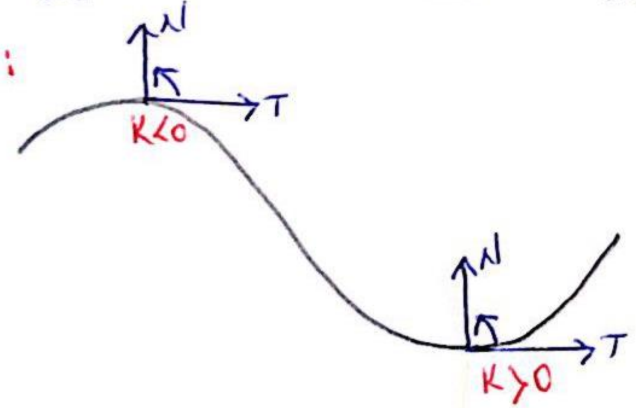
$\Rightarrow -x'x''=y'y'' \Rightarrow -\dfrac{x''}{y'}=\dfrac{y''}{x'}$ olur.

Not: $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = x'y''-x''y' = \kappa x'^2+\kappa y'^2=\kappa$ olup $\kappa=\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$ bulunur.

T ile N arasındaki ilişki: $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eğrisinin parametresi yay parametresi olsun. $\kappa=\dfrac{d\theta}{ds}$ idi. $T=(\cos\theta,\sin\theta)$, $N=(-\sin\theta,\cos\theta)$ olup

$$\frac{dT}{ds}=(-\sin\theta,\cos\theta)\frac{d\theta}{ds} \Rightarrow \frac{dT}{ds}=\kappa N \Rightarrow \boxed{T'=\kappa N}$$ bulunur.

Not:



κ nın işareti eğrinin kıvrılma yönü ile ilgilidir. $\kappa<0$ ise eğri N nin tersi yönde $\kappa>0$ ise N yönünde kıvrılır.

Keyfi parametreli eğrinin eğriliği : Verilen bir eğri her zaman yay parametresi ile verilmez. Bir eğriyi yay parametresi ile ifade etmek de her zaman kolay değildir. $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ eğrisinin parametresi herhangi bir parametre olsun. $\|\frac{d\alpha}{dt}\| \neq 1$ dir. s yay uzunluğu olmak üzere,

$$s=\int \|\frac{d\alpha}{dt}\| dt \Rightarrow \frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \text{ olur.}$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} \text{ ve } \frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{dx}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} \text{ ve } \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} \text{ bulunur.}$$

$\kappa = x'y''-y'x'' = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdakiler burada yazılırsa,

$$\boxed{K = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

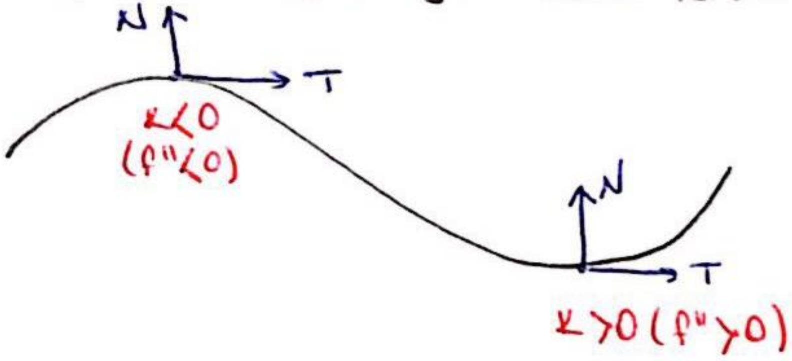
elde edilir.

Özel Hal: Burada özel bir durum özellikle dikkat çekicidir: Eğri $y=f(x)$ şeklinde verilsin. Bu durumda eğri üzerindeki bir nokta $(x, f(x))$ olacaktır.

$$\frac{dx}{dt} = 1 \;,\; \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ olup } \quad K = \frac{d^2y/dx^2}{\left(1 + (dy/dx)^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}} \quad \text{olacaktır.} \quad \left(\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\right)$$

Sonuç: $f'=0$ olan noktalarda (yani eğrinin teğetinin yatay olduğu durumda) eğrilik ikinci türeve eşittir. Bu gözlem eğrinin bir başka karakteristiğini gösterir: Bir noktada bir eğrinin eğriliğini bulmak için O noktaya eğriyi $y=f(x)$ şeklinde ifade edecek ve apsisi bu noktada eğriye teğet olan bir koordinat sistemi kurarız. Bu durumda eğrilik ikinci türeve eşittir.



Örnek:

$$\alpha(t) = (t, t^2) \text{ için } \kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

$\alpha(t) = (t, \mathrm{ch}t)$ için $\kappa(t) = \mathrm{sch}^2 t - t\,\mathrm{th}t \cdot \mathrm{sch}t$ dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Düzlemde Eğriler

Ders 16