ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

PROBLEMLER

1) E^n de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dik koordinat sistemi verilsin. $\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = (1, 0, \ldots, 0), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} = (0, 0, \ldots, 1) \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

yazılabilir. $\forall P \in E^n$ için

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[f]\right)(P) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P [f]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_P$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ olur.}$$

2) $X, Y \in \mathcal{X}(E^3)$ vektör alanları $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$,
$Y = 2x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ şeklinde tanımlanıyor. $Y - \frac{1}{x_1} X$ vektör

alanının $P = (1,-1,1) \in E^3$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\left(Y - \frac{1}{x_1} X\right)(P) = Y(P) - \frac{1}{x_1(P)} X(P)$$

$$= \left(2x_1^2(P) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + x_2^3(P) \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P\right) - \frac{1}{P_1}\left(x_1(P) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - x_2(P) \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P\right)$$

$$= (2P_1^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + \frac{P_2}{P_1} \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P + P_2^3 \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P - \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_P$$

$$= (1,-1,-1)_P$$

3) $X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $Y = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3}$

vektör alanları veriliyor. $f, g \in C(E^3, \mathbb{R})$ olmak üzere $fX - gY$ vektör alanının $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_3}$ vektör alanlarının bir lineer birleşimi olması için f ile g arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm:

$$fX - gY = f\left(x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) - g\left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$\chi(E^n)$, $C(E^n, \mathbb{R})$ modül olduğundan

$$= (f x_2^2 - g x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-f x_1^2 - g x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} + (f x_1 x_2 - g x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

olur. $fX - gY$ nin $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_3}$ ün lineer birleşimi olması için

$$f x_2^2 - g x_3 = 0 \text{ olmalıdır.}$$

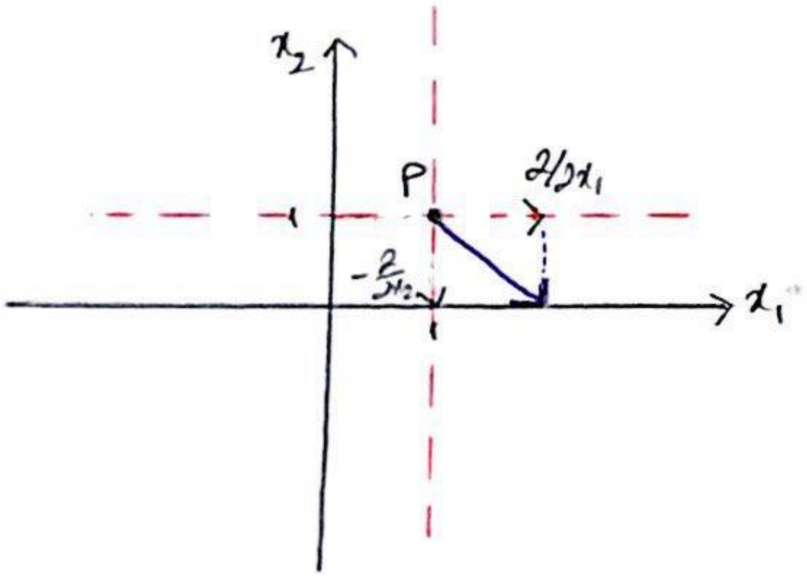
4) E^2 üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan vektör alanlarının $P(1,1)$ noktasındaki değerlerini çiziniz.

a) $X(P) = (P;\ x_2, -x_1)$ b) $X(P) = (P;\ x_2, x_1)$

c) $X(P) = (P;\ -x_1, -x_2)$ d) $X(P) = (P;\ -2x_2, \frac{1}{2}x_1)$

Çözüm:

a) $X(P) = (x_2, -x_1)\big|_P = (x_2(P), -x_1(P)) = (1, -1) = 1\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + (-1)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P$



5) $x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ vektör alanını $X=\dfrac{\partial}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}$, $Y=\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ ve

$Z=x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ vektör alanları cinsinden ifade ediniz.

Çözüm:

$x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial}{\partial x_3}=fX+gY+hZ$ olacak şekilde $f,g,h:E^3\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulmalıyız.

$$\Rightarrow x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}=f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+g\frac{\partial}{\partial x_2}+h\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$=(f+hx_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+g\frac{\partial}{\partial x_2}+(-fx_1+h)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$\Rightarrow x_1=f+hx_1$, $x_2=g$, $x_3=-fx_1+h$

$$\Rightarrow f=\frac{x_1(1-x_3)}{1+x_1^2}\ ,\ h=\frac{x_3+x_1^2}{1+x_1^2}\ ,\ g=x_2 \text{ olur.}$$

6) E^n de $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ Öklid çatısı ve bu çatının belirlediği $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemi verilsin. $X \in \mathcal{X}(E^n)$ için $X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öklid çatısı tanımından $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ $\mathbb{R}^n$ için ortonormal bazdır. O halde $\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = \delta_{ij}$ dir.

$\mathcal{X}(E^n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı ve $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ $\mathcal{X}(E^n)$ nin bazı olduğundan $X \in \mathcal{X}(E^n)$ için

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ yazılabilir.}$$

$$X[x_j] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)[x_j] = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}[x_j] = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{\delta_{ji}} = a_j$$

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} X[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ olur.}$$

7) E^3 de $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemi veriliyor.

$$X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\ ,\quad Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3) \text{ ve}$$

$f = x_1 x_3\ ,\ g = x_3^3 \in C(E^3, \mathbb{R})$ olsun. Buna göre,

a) $X(f)$ b) $X(g)$ c) $X(fg)$ d) $fX(g) - gX(f)$ e) $X(X(f))$

f) $X(Y(f))$ g) $Y(X(f))$ h) $Y(fX(g))$ fonksiyonlarını hesaplayınız.

Çözüm:

a) $$X(f) = \left(x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x_1 x_3) = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 x_3) - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 x_3)$$

$$= x_2^2 \frac{\partial (x_1 x_3)}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial (x_1 x_3)}{\partial x_3}$$

$$= x_2^2 x_3 - x_1 x_1$$

c) $$X(fg) = \left(x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(x_1 x_3^4) = x_2^2 x_3^4 - 4 x_1^2 x_3^3$$

veya $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ kullanılabilir.

8) $X, Y \in \chi(E^n)$ olsun. $\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $X(f) = Y(f) \Leftrightarrow X = Y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p , \quad Y_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \text{ olsun.}$$

$(\Rightarrow)$ $X(f) = Y(f)$ olsun. $\forall p \in E^n$ için $(X(f))(p) = (Y(f))(p)$

$$\Rightarrow X_p(f) = Y_p(f) \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$$

f yerine x_j alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\Big|_p}_{\delta_{ji}} = \sum_{i=1}^{n} b_i \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\Big|_p}_{\delta_{ji}} \Rightarrow a_i = b_i , \; 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow X_p = Y_p , \; \forall p$$

$$\Rightarrow X = Y$$

$(\Leftarrow)$ $X = Y$ olsun. $\forall p \in E^n$ için $X_p = Y_p$ dir. O halde $a_i = b_i$, $1 \leq i \leq n$ dir.

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = Y_p(f) \Rightarrow (X(f))(p) = (Y(f))(p) \Rightarrow X(f) = Y(f)$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Problem Çözümü

Ders 7