ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2

Afin Alt Uzay

A, V ile birleşen bir afin uzay ve $B\subset A$ olsun. Bir $P\in B$ için $W_P(B)=\{\overrightarrow{PX} \mid X\in B\}$ kümesi V nin bir altuzayı ise B ye A nın bir afin alt uzayı denir.

ÖKLİD UZAYI

A, V vektör uzayı ile eşlenen bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına Öklid uzayı denir.

Örnek: $A=\mathbb{R}^n$ kümesinin $V=\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen afin uzay olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$(X,Y)\longrightarrow \langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. Yani $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayıdır. O halde $\mathbb{R}^n$ ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayı Öklid uzayıdır. Bu uzay E^n ile gösterilir.

Özel Haller

1) $n=1$ için $E^1=\mathbb{R}^1$ 1-boyutlu Öklid uzayıdır. Bu uzaya Öklid doğrusu veya reel eksen denir. E^1

2) $n=2$ için $E^2=\mathbb{R}^2$ 2-boyutlu Öklid uzayıdır. Bu uzaya Öklid düzlemi denir.

3) $n=3$ için $E^3=\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayıdır. Bu uzay içinde yaşadığımız uzaydır.

E^n de Uzaklık

$$d: E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \to d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle}$$

ile tanımlı d fonksiyonuna E^n de uzaklık fonksiyonu, $d(X,Y)\in\mathbb{R}$ sayısına da $X,Y\in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

Teorem 3: E^n de tanımlı d uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat:

d nin metrik olduğunu göstermek için

i) $\forall x, y \in E^n$ için $d(x,y) \geq 0$.

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x, y \in E^n$ için $d(x,y) = d(y,x)$ "Simetri Özelliği"

iii) $\forall x, y, z \in E^n$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ "Üçgen Eşitsizliği"

özelliklerinin sağlandığını göstermek gerekir. Bu 3 özellik kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç: Üzerinde bir metrik tanımlı olan kümeye metrik uzay denildiğini biliyoruz. O halde E^n Öklid uzayı d uzaklık metriği ile birlikte bir metrik uzaydır. E^n de tanımlı d metriğine **Öklid metriği** denir.

E^n de Açı

$X, Y, Z \in E^n$ noktaları verilsin. $\overrightarrow{XY}$ ve $\overrightarrow{XZ}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \, \|XZ\|}$$ ile tanımlanır.

Öklid Çatısı

E^n Öklid uzayında $P_0, P_1, \ldots, P_n \in E^n$ noktaları verilsin. $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör kümesi E^n nin eşleştiği $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ kümesine E^n de başlangıcı P_0 olan Öklid çatısı veya ortogonal çatı veya dik çatı denir.

Sonuç:

$\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ E^n de öklid çatısıdır $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Örnek:

E^n de, $E_0=(0,0,\dots,0)\in E^n$
$E_1=(1,0,\dots,0)\in E^n$
$\vdots$
$E_n=(0,0,\dots,0)\in E^n$ noktaları veriliyor. $\{E_0,E_1,\dots,E_n\}$
kümesi E^n de öklid çatısıdır:

$\overrightarrow{E_0E_1}=(1,0,\dots,0)$, $\overrightarrow{E_0E_2}=(0,1,\dots,0)$, ..., $\overrightarrow{E_0E_n}=(0,0,\dots,1)$ olup
$i\neq j$ için $\langle\overrightarrow{E_0E_i},\overrightarrow{E_0E_j}\rangle=0$, $i=j$ için $\langle\overrightarrow{E_0E_i},\overrightarrow{E_0E_i}\rangle=1$ dir.
O halde $\{\overrightarrow{E_0E_1},\overrightarrow{E_0E_2},\dots,\overrightarrow{E_0E_n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ için ortonormal bazdır.
$\Rightarrow$ $\{E_0,E_1,\dots,E_n\}$ öklid çatısıdır.

Örnek:

E^2 de $P_0=(a_1,a_2)$, $P_1=(a_1+\cos\theta,\ a_2+\sin\theta)$, $P_2=(a_1-\sin\theta,\ a_2+\cos\theta)$
noktaları veriliyor. $\{P_0,P_1,P_2\}$ nin E^2 için öklid çatısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\overrightarrow{P_0P_1} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ olup

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1} \rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\langle \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$ olur. Yani,

$$\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = \delta_{ij} \text{ dir.}$$

O halde $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ $\mathbb{R}^2$ için ortonormal bazdır.

$\Rightarrow \{P_0, P_1, P_2\}$ E^2 için Öklid çatısıdır.

Örnek:

$P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,1)$ olmak üzere $\{P_0, P_1, P_2\}$ nin E^2 de bir afin çatı olduğunu fakat öklid çatısı olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

$\overrightarrow{P_0P_1} = (1,2)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (2,1)$ olur. Önce $\{P_0, P_1, P_2\}$ nin E^2 de afin çatı olduğunu gösterelim: Bunun için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ $\mathbb{R}^2$ de baz olmalıdır.

Lineer bağımsızlık:

$\lambda_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \lambda_2 \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{0}$ olsun. $(\lambda_1 = \lambda_2 \overset{?}{=} 0)$

$\Rightarrow \lambda_1(1,2) + \lambda_2(2,1) = \vec{0} = (0,0)$

$\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \, , \; 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ Lineer bağımsızdır.

Germe Aksiyomu: $\text{boy}\,\mathbb{R}^2 = 2$ ve $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ Lineer bağımsız olduğundan $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ yi gerer.

$\Rightarrow \{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ $\mathbb{R}^2$ için bazdır.

$\Rightarrow \{P_0, P_1, P_2\}$ E^2 de afin çatıdır.

$\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = 2+2 = 4 \neq 0$ olduğundan $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ $\mathbb{R}^2$ için ortonormal baz değildir.

$\Rightarrow \{P_0, P_1, P_2\}$ E^2 için Öklid çatısı olamaz.

Öklid Koordinat Sistemi

E^n öklid uzayında bir $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ öklid çatısı verilsin. E^n aynı zamanda afin uzay olduğundan $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ çatısı bir afin çatıdır. Bu afin çatıya karşılık gelen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gibi bir afin koordinat sistemi daima vardır. Bu afin koordinat sistemine Öklid koordinat sistemi veya dik koordinat sistemi denir. Burada,

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$P \longrightarrow x_i(P) = a_i$$

$P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$ olup $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Öklid Uzayı , Öklid Çatısı

Öklid Koordinat Sistemi

Ders 2