Ondokuz Mayıs Üniversitesi Uzaktan Eğitim Merkezi (UZEM)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

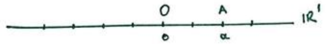
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 1

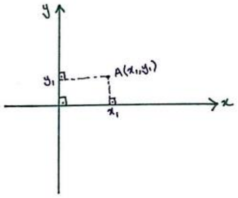
ÖKLİD UZAYINDA NOKTALARIN KOORDİNATLARININ BELİRLENMESİ

1) 1-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ile gösterilir. Bu uzayın noktaları doğrudaştır. Uzaya reel eksen veya Öklid doğrusu adı verilir.

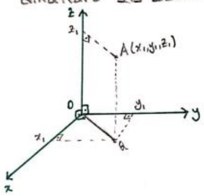


$\mathbb{R}$ uzayının bir A noktasına şekildeki gibi bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı karşılık gelir. $a \in \mathbb{R}$ ye A noktasının koordinatı denir. $A = (a)$ ile gösterilir.

2) 2-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^2$ ile gösterilir. Bu uzaya Öklid düzlemi adı verilir. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dir. $\mathbb{R}^2$ de bir xoy dik koordinat sistemi verildiğinde bir A noktasının koordinatları aşağıdaki şekilde bulunur:

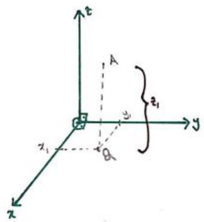


3) 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ ile gösterilir. Bu uzay içinde yaşadığımız uzaydır. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dir. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir xyz dik koordinat sistemi verildiğinde bir A noktasının koordinatları şu şekilde bulunur:



A noktasından xoy düzlemine bir dik inelim. Bu dikmenin xoy düzlemini kestiği nokta Q olsun. Q dan x ve y eksenlerine çizilen paralellerin bu eksenleri kestiği noktalara, sırası ile, x_1 ve y_1 diyelim. A dan OQ ya çizilen paralelin z eksenini kestiği nokta z_1 olmak üzere (x_1, y_1, z_1) üçlüsü A nın koordinatlarıdır.

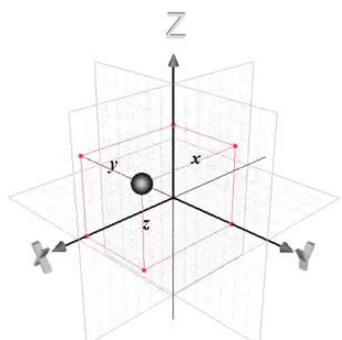
5



Tersine, bir (x_1,y_1,z_1) üçlüsü verildiğinde buna karşılık gelen A noktası şu şekilde bulunur: x ve y eksenlerinden x_1 ve y_1 uzunluklu noktalar tespit edilir. Bu noktalardan x ve y eksenlerine çizilen parallelerin kesiştiği nokta Q olmak üzere Q dan z boyunca z_1 birim ilerlenir. Gelinen nokta aranan noktadır.

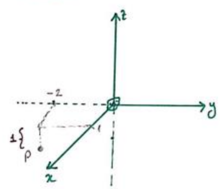
4

7



8

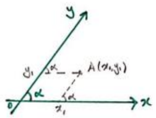
Örnek: $P(1,-2,-1)$ noktasının yerini belirleyiniz.



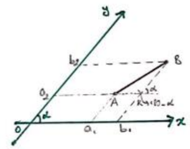
7

Düzlemde Eğik Koordinat Sistemi

Aralarında α açısı bulunan iki reel eksenin meydana getirdiği sisteme eğik koordinat sistemi denir. Bu sistemde verilen bir A noktasının koordinatları aşağıdaki gibi bulunur:



Eğik Koordinat Sisteminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık



$A(a_1,a_2)$ ve $B(b_1,b_2)$ noktaları arasındaki $d(A,B)$ uzaklığını bulalım: $\overset{\triangle}{AKB}$ üçgeni için kosinüs teoreminden,

$$[d(A,B)]^2 = [d(A,K)]^2 + [d(K,B)]^2 - 2\, d(A,K) \cdot d(K,B) \cdot \cos(180-\alpha)$$

$$\Rightarrow [d(A,B)]^2 = (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + 2(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + 2(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cos\alpha}$$

bulunur.

Örnek: Aralarında 60° açı bulunan xoy eğik koordinat sisteminde verilen $A(1,-2)$ ve $B(3,1)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 1

13

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Analitik Geometri I

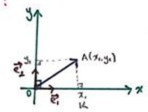
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2

14

Bir Noktanın Dik Koordinat Sistemi İle Eğik Koordinat Sistemindeki Koordinatları Arasındaki Bağıntılar

Not:



$\vec{OA} = \vec{OK} + \vec{KA}$

$\Rightarrow \vec{OA} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}$

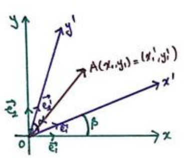
yazılabilir. Burada, $\{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$ $\mathbb{R}^2$ nin standart bazıdır.

xoy dik koordinat sistemi ile aralarında α açısı bulunan $x'o'y'$ eğik koordinat sistemi verilsin. $m(\widehat{xx'}) = \beta$ olsun.

11

15

1) Orijinler Çakışık Olsun. ($O = O'$)



Düzlemin standart bazı $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ve bir diğer bazı da $\{\vec{e_1}', \vec{e_2}'\}$ olsun. $\|\vec{e_1}'\| = \|\vec{e_2}'\| = 1$ alalım.
Düzlemin bir A noktasının xoy sistemindeki koordinatları $A(x_1, y_1)$ ve $x'oy'$ eğik koordinat sistemindeki koordinatları da $A(x_1', y_1')$ olsun.

A nın xoy deki koordinatları (x_1, y_1) olduğundan $\vec{OA} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}$

A nın $x'oy'$ " " (x_1', y_1') " $\vec{OA} = x_1'\vec{e_1}' + y_1'\vec{e_2}'$ olur.

$\Rightarrow x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} = x_1'\vec{e_1}' + y_1'\vec{e_2}' \quad \ldots (*)$

yazılabilir. (*) eşitliğinin her iki yanı önce $\vec{e_1}$, sonra $\vec{e_2}$ ile iç çarpılırsa,

$x_1 = x_1'\cos\beta + y_1'\cos(\alpha+\beta)$

$y_1 = x_1'\cos(90^\circ - \beta) + y_1'\cos(90^\circ - (\alpha+\beta))$

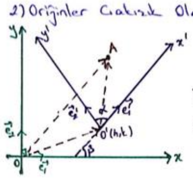
$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1'\cos\beta + y_1'\cos(\alpha+\beta) \\ y_1 = x_1'\sin\beta + y_1'\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$

bulunur.

12

16

2) Orijinler Çakışık Olmasın



O' nün xoy deki koordinatları (h,k) olsun.

$\Rightarrow \vec{OO'} = h\vec{e_1} + k\vec{e_2}$ yazılabilir.

Düzlemin bir A noktasının xoy deki koordinatları (x_1, y_1), $x'o'y'$ deki koordinatları da (x_1', y_1') olsun.

$\Rightarrow \vec{OA} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}$, $\vec{O'A} = x_1'\vec{e_1}' + y_1'\vec{e_2}'$ olur.

$\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$

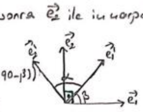
$\Rightarrow x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} = h\vec{e_1} + k\vec{e_2} + x_1'\vec{e_1}' + y_1'\vec{e_2}'$

$\Rightarrow (x_1 - h)\vec{e_1} + (y_1 - k)\vec{e_2} = x_1'\vec{e_1}' + y_1'\vec{e_2}' \ldots (*)$

(*) ın her iki yanını önce $\vec{e_1}$, sonra $\vec{e_2}$ ile iç çarpalım:

$x_1 - h = x_1'\cos\beta + y_1'\cos(\alpha+\beta)$

$y_1 - k = x_1'\cos(90^\circ - \beta) + y_1'\cos(\alpha - (90 - \beta))$



$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - h = x_1'\cos\beta + y_1'\cos(\alpha+\beta) \\ y_1 - k = x_1'\sin\beta + y_1'\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$

13

17

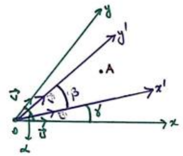
Bir Noktanın iki Eğik Koordinat Sistemindeki Koordinatları Arasındaki Bağıntılar

Aralarında α açısı bulunan xoy eğik koordinat sistemi ve aralarında β açısı bulunan $x'o'y'$ eğik koordinat sistemi verilsin. $m(\widehat{xx'})=\gamma$ olsun.

14

18

1) Orijinler Çakışık Olsun $(O=O')$



Düzlemin iki farklı bazı $\{\vec{u},\vec{v}\}$ ve $\{\vec{u}',\vec{v}'\}$ olsun. $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{u}'\|=\|\vec{v}'\|=1$ alalım. Düzlemin bir A noktasının xoy sistemindeki koordinatları (x_1,y_1) ve $x'oy'$ deki koordinatları da (x_1',y_1') olsun.

$\Rightarrow \vec{OA}=x_1\vec{u}+y_1\vec{v}$, $\vec{OA}=x_1'\vec{u}'+y_1'\vec{v}'$

$\Rightarrow x_1\vec{u}+y_1\vec{v}=x_1'\vec{u}'+y_1'\vec{v}' \ldots (*)$

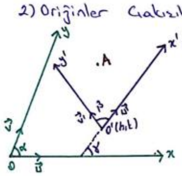
Eşitliğin her iki yanını önce $\vec{u}$ sonra $\vec{v}$ ile iç çarpalım:

$$\begin{cases} x_1+y_1\cos\alpha = x_1'\cos\gamma + y_1'\cos(\beta+\gamma) \\ x_1\cos\alpha + y_1 = x_1'\cos(\alpha-\gamma)+y_1'\cos(\alpha-(\beta+\gamma)) \end{cases}$$

15

19

2) Orijinler Çakışık Olmasın $(O\neq O')$



O' nün xoy deki koordinatları (h,k) olsun.

$\Rightarrow \vec{OO'}=h\vec{u}+k\vec{v}$

Düzlemin bir A noktasının xoy deki koordinatları (x_1,y_1) , $x'o'y'$ deki koordinatları da (x_1',y_1') olsun.

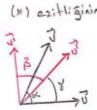
$\Rightarrow \vec{OA}=x_1\vec{u}+y_1\vec{v}$, $\vec{O'A}=x_1'\vec{u}'+y_1'\vec{v}'$

$OA=\vec{OO'}+\vec{O'A}$

$\Rightarrow x_1\vec{u}+y_1\vec{v}=h\vec{u}+k\vec{v}+x_1'\vec{u}'+y_1'\vec{v}'$

$\Rightarrow (x_1-h)\vec{u}+(y_1-k)\vec{v}=x_1'\vec{u}'+y_1'\vec{v}' \ldots (*)$

$(*)$ eşitliğinin her iki yanını önce $\vec{u}$, sonra $\vec{v}$ ile iç çarpalım:



$x_1-h+(y_1-k)\cos\alpha = x_1'\cos\gamma+y_1'\cos(\beta+\gamma)$

$(x_1-h)\cos\alpha+y_1-k = x_1'\cos(\alpha-\gamma)+y_1'\cos(\beta-(\alpha-\gamma))$

16

20

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 3

Örnek: xoy dik koordinat sistemi ile aralarında $60°$ açı bulunan $x'oy'$ eğik koordinat sistemi veriliyor. xoy sisteminde verilen bir $A(1,3)$ noktasının $x'oy'$ sistemindeki koordinatlarını bulunuz. ($m(\widehat{xx'})=60°$)

Örnek: xoy dik koordinat sistemi ve aralarında $60°$ açı bulunan $x'o'y'$ eğik koordinat sistemi veriliyor. O' nün xoy deki koordinatları $O'(2,1)$ olmak üzere $x'o'y'$ de verilen $A(1,1)$ noktasının xoy dik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz. ($m(\widehat{xx'})=90°$)

Örnek: Aralarında $60°$ lik açı bulunan xoy ve aralarında $30°$ lik açı bulunan $x'o'y'$ eğik koordinat sistemleri veriliyor. O' nün xoy sistemindeki koordinatları $O'(1,1)$ olmak üzere xoy eğik koordinat sisteminde verilen $A(-2,2)$ noktasının $x'o'y'$ eğik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz. ($m(\widehat{xx'})=60°$)

25

Örnek: xoy dik koordinat sistemi ve aralarında 60° lik açı bulunan $x'oy'$ eğik koordinat sistemi veriliyor. $x'oy'$ sisteminde verilen $A(1,1)$ noktasının xoy dik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz. $(m(\widehat{xx'}) = 90^\circ)$

20

26

Örnek: Aralarında 60° açı bulunan xoy eğik koordinat sistemi ile aralarında 60° açı bulunan $x'o'y'$ eğik koordinat sistemi veriliyor. O' nün xoy deki koordinatları $O'(2,2)$ olmak üzere $x'o'y'$ sisteminde verilen bir $A(1,1)$ noktasının xoy sistemindeki koordinatlarını bulunuz $(m(\widehat{xx'}) = 30^\circ)$

21

27

Örnek: Aralarında 60° lik açı bulunan xoy eğik koordinat sisteminde $O'(2,4)$ noktası veriliyor. $x'o'y'$ dik koordinat sisteminde verilen $A(3,3)$ noktasının xoy eğik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz. $(m(\widehat{xx'}) = 0^\circ)$

22

28

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 3

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4

Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ olmak üzere $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\alpha\times\beta$ veya $\alpha\wedge\beta$ ile gösterilir ve

$$\alpha\times\beta=\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha,\beta)\vec{e}_i$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$$ ile tanımlanır.

Bu tanıma göre

$\wedge:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dır.

Örnek: $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ için $\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2=e_3$, $\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3=e_1$, $\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1=e_2$ dir.

Vektörel Çarpımın Özellikleri

1) $\forall\alpha\in\mathbb{R}^3$ için $\alpha\wedge\alpha=\vec{0}$ dır.

$$\alpha\wedge\alpha=\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha,\alpha)\vec{e}_i=0$$

2) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3$ için $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$ dır.

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha,\beta)\vec{e}_i=-\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\beta,\alpha)\vec{e}_i=-\beta\wedge\alpha$$

3) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^3$ için $(\alpha+\beta)\wedge\gamma=(\alpha\wedge\gamma)+(\beta\wedge\gamma)$ dır.

$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha+\beta,\gamma)\vec{e}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha,\gamma)\vec{e}_i+\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\beta,\gamma)\vec{e}_i$$

$$=(\alpha\wedge\gamma)+(\beta\wedge\gamma)$$

4) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^3$ için $\alpha\wedge(\beta+\gamma)=(\alpha\wedge\beta)+(\alpha\wedge\gamma)$ dır.

5) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lambda\alpha\wedge\beta=\lambda(\alpha\wedge\beta)=\alpha\wedge(\lambda\beta)$ dır.

$$\lambda\alpha\wedge\beta=\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\lambda\alpha,\beta)\vec{e}_i$$

$$=\underbrace{\lambda\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha,\beta)\vec{e}_i}_{\lambda(\alpha\wedge\beta)}$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e}_i,\alpha,\lambda\beta)\vec{e}_i}_{\alpha\wedge(\lambda\beta)}$$

6) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^3$ için α ile β lineer bağımlı ise $\alpha\wedge\beta=\vec{0}$ dır.

α ile β lineer bağımlı ise $\alpha=\lambda\beta$ dır.

33

7) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \neq (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ dır.

$\alpha = (1,0,1)$, $\beta = (1,0,0)$, $\gamma = (1,1,0)$ alınıp eşitliğin sağlanmadığı görülebilir.

26

34

8) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha$ dır.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ alalım.

$$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_3\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_3 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2, \alpha_1\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_3 + \alpha_3\beta_2\gamma_3,$$
$$\alpha_2\beta_3\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta_3\gamma_1) \ldots (1)$$

$$\langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha = (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
$$= (\cancel{\alpha_1\beta_1\gamma_1} + \alpha_2\beta_1\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_3 - \cancel{\alpha_1\beta_1\gamma_1} - \alpha_1\beta_2\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_3,$$
$$\alpha_1\beta_2\gamma_1 + \cancel{\alpha_2\beta_2\gamma_2} + \alpha_3\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 - \cancel{\alpha_2\beta_2\gamma_2} - \alpha_2\beta_3\gamma_3,$$
$$\alpha_1\beta_3\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_2 + \cancel{\alpha_3\beta_3\gamma_3} - \alpha_3\beta_1\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_2 - \cancel{\alpha_3\beta_3\gamma_3})$$

27

35

$$\Rightarrow \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha = (\alpha_3\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_3 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2,$$
$$\alpha_1\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_3 + \alpha_3\beta_2\gamma_3,$$
$$\alpha_2\beta_3\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta_3\gamma_1) \ldots (2)$$

(1) ve (2) den,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha \quad \text{olur.}$$

28

36

Karma Çarpım

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin karma çarpımı $\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle$ ile gösterilir.

$\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle = \det(\alpha, \beta, \gamma)$ dır.

(ispatı kolaylıkla yapılabilir)

Özellikleri

1) $\langle \alpha \wedge \beta, \alpha \rangle = 0$ ve $\langle \alpha \wedge \beta, \beta \rangle = 0$ dır.

$$\langle \alpha \wedge \beta, \alpha \rangle = \det(\alpha, \beta, \alpha) = 0$$

Sonuç: iki vektörün vektörel çarpımı bu vektörlerin her ikisine de diktir.

Örnek: $\alpha = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\beta = (2,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin herbirine de dik olan bir vektör bulunuz.

29

37

2) $\forall \alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}^3$ için $\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \wedge \eta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle \langle \beta, \eta \rangle - \langle \alpha, \eta \rangle \langle \beta, \gamma \rangle$ dır
(Lagrange Özdeşliği)

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, \gamma \wedge \eta \rangle &= \det(\alpha, \beta, \gamma \wedge \eta) \\ &= \det(\gamma \wedge \eta, \alpha, \beta) \\ &= \langle (\gamma \wedge \eta) \wedge \alpha, \beta \rangle \\ &= \langle \langle \gamma, \alpha \rangle \eta - \langle \eta, \alpha \rangle \gamma, \beta \rangle \\ &= \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \eta, \beta \rangle - \langle \eta, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle \end{aligned}$$

Sonuç:

$$\langle \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle - (\langle \alpha, \beta \rangle)^2$$

38

Teorem: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta \text{ dır.}$$

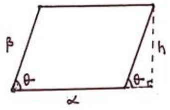
İspat:
$$\begin{aligned} \|\alpha \wedge \beta\|^2 &= \langle \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta \rangle \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle - (\langle \alpha, \beta \rangle)^2 \\ &= \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - \|\alpha\|^2 . \|\beta\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta .$$

39

Vektörel Çarpımın Geometrik Anlamı

$\mathbb{R}^3$ de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı S ise $S = \|\alpha \wedge \beta\|$ dır.



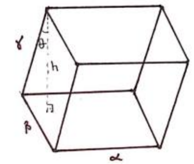
$S = \|\alpha\| . h$, $\sin\theta = \dfrac{h}{\|\beta\|}$

$\Rightarrow S = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta = \|\alpha \wedge \beta\|$ olur.

40

Karma Çarpımın Geometrik Anlamı

$\mathbb{R}^3$ de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi V ise $V = \langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle = \det(\alpha, \beta, \gamma)$ dır.



$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle &= \|\alpha \wedge \beta\| . \|\gamma\| . \cos\theta \\ &= \|\alpha \wedge \beta\| . \cancel{\|\gamma\|} . \frac{h}{\cancel{\|\gamma\|}} \\ &= V \end{aligned}$$

41

Örnek: Aşağıdaki vektör çiftleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını hesaplayınız.

a) $\alpha = (2,1,3)$, $\beta = (1,0,2)$ b) $\alpha = (3,4,5)$, $\beta = (2,1,3)$

42

Örnek: $\|\alpha \wedge \beta\| = \langle \alpha, \beta \rangle \tan\theta$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta$

$$= \|\alpha\| . \|\beta\| . \cos\theta . \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \langle \alpha, \beta \rangle \tan\theta$$

43

Örnek: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = 0$$

olduğunu gösteriniz (Jacobi Özdeşliği)

Çözüm:

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = -(\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha = -\langle \beta, \alpha \rangle \gamma + \langle \gamma, \alpha \rangle \beta$$

$$\beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) = -(\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta = -\langle \gamma, \beta \rangle \alpha + \langle \alpha, \beta \rangle \gamma$$

$$\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = -(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = -\langle \alpha, \gamma \rangle \beta + \langle \beta, \gamma \rangle \alpha$$

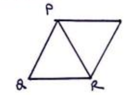
$+$ ______________________________

$$\Rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = 0$$

44

Örnek: $P = (1,2,0)$, $Q = (3,0,-3)$, $R = (5,2,6)$ noktaları verilsin. $\overset{\triangle}{PQR}$ üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm:



$\overset{\triangle}{PQR}$ nin alanı S olsun.

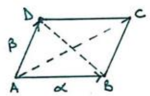
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \|PQ \wedge PR\| \text{ dir.}$$

Gerekli hesaplamalardan sonra $S = 14$ bulunur.

45

Örnek: Vektörel çarpımı kullanarak bir P paralelkenarının köşegenleri üzerine kurulan paralel kenarın alanının P nin alanının iki katı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



P nin alanı $S=\|\alpha\wedge\beta\|$ dır.

$\vec{AC}=\alpha+\beta$

$\vec{BD}=\beta-\alpha$ olur.

AC ve BD üzerine kurulan paralel kenarın alanı S_1 ise

$$S_1=\|(\alpha+\beta)\wedge(\beta-\alpha)\|$$
$$=\|\alpha\wedge(\beta-\alpha)+\beta\wedge(\beta-\alpha)\|$$
$$=\|\alpha\wedge\beta-\beta\wedge\alpha\|$$
$$=\|\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\beta\|$$
$$=2\|\alpha\wedge\beta\|$$
$$=2S$$

46

Örnek: Aşağıda verilen vektörlerin aynı düzlemde olup olmadığını araştırınız.

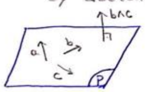
1) $a=(-1,2,2)$, $b=(2,-3,1)$, $c=(-4,7,3)$

2) $a=(3,-2,1)$, $b=(2,1,2)$, $c=(3,-1,-4)$

Çözüm:

$\langle a, b\wedge c\rangle=0$ ise a,b ve c aynı düzlemdedir.

$\Rightarrow \det(a,b,c)=0$ ise a,b ve c aynı düzlemdedir.



47

Örnek: $a=(1,1,0)$, $b=(0,1,1)$ vektörlerine dik olan birim vektör bulunuz.

Çözüm:

$a\wedge b=(1,-1,1)=\alpha$ olsun.

$\|\alpha\|=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ olur.

48

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 4

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

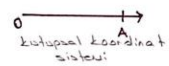
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5

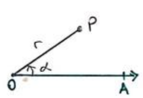
Düzlemde Kutupsal Koordinat Sistemi

Düzlemde kartezyen ve eğik koordinat sistemi dışında kutupsal koordinat sistemi de kullanılır. Bu sistem bazı problemlerin çözümünü oldukça kolaylaştırır. Sistemin esası, sabit bir O noktası ve bu noktadan geçen bir [OA) ışınından ibarettir. Mecburi olmamakla birlikte ışın, x ekseni gibi yatay çizilir.



O ya **kutup noktası**, ışına da **kutup ekseni** denir.

Kutupsal Koordinat Sisteminde Bir Noktanın Koordinatlarının Bulunması



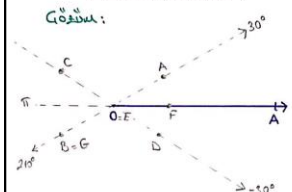
Düzlemin bir P noktası verildiğinde, $\|OP\|=r$ ve $A\hat{O}P$ pozitif yönlü açısının ölçüsü α olmak üzere (r,α) ikilisine P nin **kutupsal koordinatları** denir.

Tersine, (r,α) ikilisi verildiğinde buna karşılık gelen P noktası şu şekilde bulunur: [OA) ışını eğer $\alpha>0$ ise pozitif yönde, $\alpha<0$ ise negatif yönde $|\alpha|$ kadar döndürülür. O dan itibaren eğer $r>0$ ise ışın yönünde, $r<0$ ise ışının ters yönünde $|r|$ kadar ilerlenir. Gelinen nokta, (r,α) ikilisine karşılık gelen noktadır.

Örnek: Düzlemde bir kutupsal koordinat sistemi tanımlayarak aşağıdaki noktaların bu sistemdeki yerlerini belirleyiniz.

$A(2,30^\circ)$, $B(-2,30^\circ)$, $C(-2,-30^\circ)$, $D(2,-30^\circ)$, $E(0,30^\circ)$, $F(-2,\pi)$, $G(2,210^\circ)$

Çözüm:

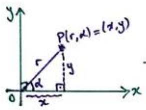


Sonuç:

1) $(r,\alpha)=(r,\alpha+2k\pi)$
2) $(r,\alpha)=(-r,\pi+\alpha)$
3) $\forall\alpha$ için $(0,\alpha)$, orijinin kutupsal koordinatlarıdır.

53

Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasındaki Bağıntılar



Düzlemde xoy dik koordinat sistemi verilsin. O noktası kutup noktası ve x ekseni de kutup ekseni olarak düşünülebilir. Böylece kartezyen koordinat sistemi ile kutupsal koordinat sistemi iç içe ifade edilmiş olur.

Düzlemin bir P noktasının kutupsal koordinatları (r,α), kartezyen koordinatları da (x,y) olsun.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}}$$
$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$
$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \boxed{r = \mp\sqrt{x^2+y^2}}$$

44

54

Örnek: Kutupsal koordinatlarda verilen $A(3,30^\circ)$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$r=3$, $\alpha=30^\circ$ dir.

$$x = r\cos\alpha = 3.\cos 30^\circ$$
$$y = r\sin\alpha = 3\sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ olur.}$$

4

55

Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $A(4,-4\sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$x=4, \quad y=-4\sqrt{3} \qquad r=\mp\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r=\mp 8$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(-\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow \alpha = 120^\circ, 300^\circ$$

$r=8$ için $\quad \overset{+}{x} = \overset{+}{r}\cos\alpha \quad \overset{-}{y} = \overset{+}{r}\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha>0, \sin\alpha<0 \Rightarrow \alpha=300^\circ$

olur. Benzer şekilde $r=-8$ için $\alpha=120^\circ$ olur.

$$\Rightarrow A(8,300^\circ) = (-8,120^\circ) \text{ olur.}$$

46

56

Not: Kartezyen koordinatlarda verilen bir geometrik yer denkleminde $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$ yazılırsa geometrik yerin kutupsal koordinatlardaki denklemi elde edilir.

Örnek:

$a,b,c \in \mathbb{R}$ için $ax+by+c=0$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemini bulalım:

$$a(r\cos\alpha)+b(r\sin\alpha)+c=0$$
$$\Rightarrow r(a\cos\alpha+b\sin\alpha)+c=0$$

Örnek:

$x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemini bulalım:

$$(r\cos\alpha)^2+(r\sin\alpha)^2=a^2$$
$$\Rightarrow r=a \text{ veya } r=-a.$$

47

57

Örnek: Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaları düzlemde gösteriniz, karteyen koordinatlarını bulunuz.

$A(2, 150^\circ)$, $B(-2, 45^\circ)$, $C(-3, 210^\circ)$

48

58

Örnek: Aşağıda karteyen koordinatları verilen noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

$A(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(2\sqrt{3}, 2)$, $D(0, 4)$, $E(-3, 0)$, $F(-\pi, \pi)$

49

59

Örnek: $A(r_1, \theta_1)$, $B(r_2, \theta_2)$ kutupsal koordinatları ile verilen iki nokta arasındaki uzaklığın

$$d(A,B) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

A ve B nin karteyen koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olsun.

$\Rightarrow x_1 = r_1\cos\theta_1$, $y_1 = r_1\sin\theta_1$, $x_2 = r_2\cos\theta_2$, $y_2 = r_2\sin\theta_2$ dir.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2}$$

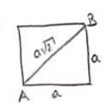
$$= \sqrt{\underline{r_1^2\cos^2\theta_1} + r_2^2\underline{\underline{\cos^2\theta_2}} - 2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \underline{r_1^2\sin^2\theta_1} + r_2^2\underline{\underline{\sin^2\theta_2}} - 2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

60

Örnek: Karşılıklı köşelerinin kutupsal koordinatları $A(12, -\pi/10)$, $B(3, \pi/15)$ olan karenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



Formülden,

$$d(A,B) = 3\sqrt{17 - 4\sqrt{3}} \text{ bulunur.}$$

$$a\sqrt{2} = 3\sqrt{17 - 4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 9(17 - 4\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}(17 - 4\sqrt{3})$$

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5

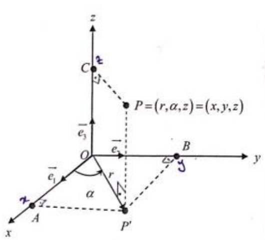
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

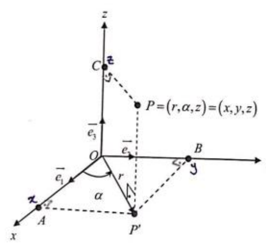
Ders 6

Uzayda Silindirik Koordinat Sistemi



Uzayda bir $P(x,y,z)$ noktası verilsin. P nin xoy düzlemine izdüşümü olan P' nün O ya olan uzaklığı r ve $\vec{OP'}$ nün x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere (r,α,z) üçlüsüne P nin silindirik koordinatları, bu koordinatları tanımlamada kullanılan koordinat sistemine de silindirik koordinat sistemi denir.

Kartezyen Koordinatlar ile Silindirik Koordinatlar Arasındaki Bağıntılar



$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \end{cases}}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \boxed{r = \mp\sqrt{x^2+y^2}}$$

Örnek: Silindirik koordinatlarda verilen $P(2, \frac{3\pi}{4}, -4)$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$r = 2, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad z = -4$

$x = r\cos\alpha = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$

$y = r\sin\alpha = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow P(x, y, z) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4)$

Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $P = (-1, 1, 3)$ noktasının silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$x = -1, \; y = 1, \; z = 3$

$r = \mp\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \mp\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(-1) \Rightarrow \alpha = 135°, 315°$

$r = \sqrt{2}$ için $\begin{matrix} \overset{-}{x} = \overset{+}{r}\cos\alpha \\ \overset{+}{y} = \overset{+}{r}\sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \cos\alpha < 0, \sin\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = 135°$

Benzer şekilde $r = -\sqrt{2}$ için $\alpha = 315°$ olur.

$\Rightarrow P(r, \alpha, z) = (\sqrt{2}, 135°, 3) = (-\sqrt{2}, 315°, 3)$

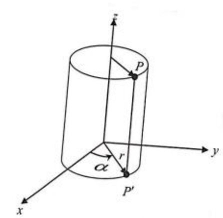
Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $P(3, 3\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ noktasının silindirik koordinatlarını bulunuz.

Cevap:

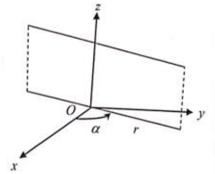
$P(6, \frac{\pi}{3}, 6\sqrt{3}) = (-6, \frac{4\pi}{3}, 6\sqrt{3})$

İrdeleme

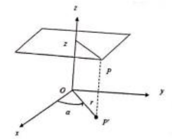
1) r = sabit olan $P(r, \alpha, z)$ noktaları r yarıçaplı silindir üzerinde bulunurlar.



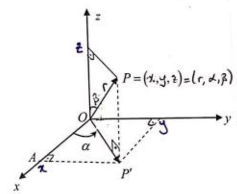
2) α = sabit olan $P(r,\alpha,z)$ noktaları x ekseni ile α açısı yapan ve z ekseninden geçen bir düzlem (yarı düzlem) üzerinde bulunurlar.



3) z = sabit olan $P(r,\alpha,z)$ noktaları z ekseninden geçen ve xoy düzlemine paralel olan düzlem üzerinde bulunurlar.

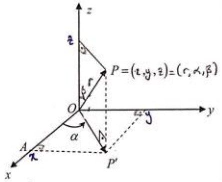


Uzayda Küresel Koordinat Sistemi



Uzayda bir $P(x,y,z)$ noktası verilsin. $\|OP\| = r$, P nin xoy düzlemine olan izdüşümü P' olmak üzere $\overrightarrow{OP'}$ nün x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı α, $\overrightarrow{OP}$ nin z ekseniyle yaptığı açı β olmak üzere, (r,α,β) üçlüsüne P nin küresel koordinatları, bu koordinatları tanımlamada kullanılan koordinat sistemine de küresel koordinat sistemi denir.

Kartezyen Koordinatlar ile Küresel Koordinatlar Arasındaki Bağıntılar



$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\overrightarrow{OP'}\|} \Rightarrow x = \|OP'\| \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{\|\overrightarrow{OP'}\|} \Rightarrow y = \|OP'\| \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\beta$$

$$\sin\beta = \frac{\|\overrightarrow{OP'}\|}{r} \Rightarrow \|\overrightarrow{OP'}\| = r\sin\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases}}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = r^2 &\rightarrow r = \mp\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\alpha = \frac{y}{x} &\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \cos\beta = \frac{z}{r} &\rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \end{aligned}$$

Örnek: Küresel koordinatlarda verilen $P(2, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$r = 2$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$

$$x = r\cos\alpha\sin\beta = 2\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = -1$$

$$y = r\sin\alpha\sin\beta = 2\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 1$$

$$z = r\cos\beta = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow P(-1, 1, \sqrt{2})$ olur.

Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $P(1,-1,-\sqrt{2})$ noktasının küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$x = 1$, $y = -1$, $z = -\sqrt{2}$

$$r = \mp\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow r = \mp 2$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(-1) \Rightarrow \alpha = 135^\circ, 315^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\mp 2}\right) \Rightarrow \beta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

1) $r = 2$ olsun

$\alpha = 135^\circ \rightarrow \beta = 225^\circ$

$\alpha = 315^\circ \rightarrow \beta = 135^\circ$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases} \quad (\alpha = 135^\circ)$$

$\Rightarrow \cos\beta < 0, \sin\beta < 0 \Rightarrow \beta = 225^\circ$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases} \quad (\alpha = 315^\circ)$$

$\Rightarrow \cos\beta < 0, \sin\beta > 0 \Rightarrow \beta = 135^\circ$

64

2) $r = -2$ olsun

$\alpha = 135^\circ \rightarrow \beta = 45^\circ$

$\alpha = 315^\circ \rightarrow \beta = 315^\circ$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases} \quad (\alpha = 135^\circ)$$

$\Rightarrow \sin\beta > 0, \cos\beta > 0 \Rightarrow \beta = 45^\circ$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases} \quad (\alpha = 315^\circ)$$

$\Rightarrow \sin\beta < 0, \cos\beta > 0 \Rightarrow \beta = 315^\circ$

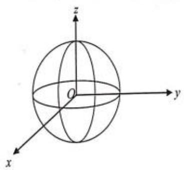
$\Rightarrow P(2, 135^\circ, 225^\circ) = (2, 315^\circ, 135^\circ) = (-2, 135^\circ, 45^\circ) = (-2, 315^\circ, 315^\circ)$ bulunur.

65

77

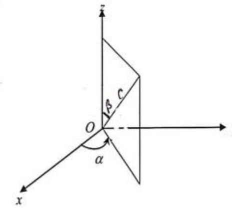
İrdeleme :

1) r=sabit olan $P(r,\alpha,\beta)$ noktaları O merkezli ve r yarıçaplı küre üzerinde bulunurlar.



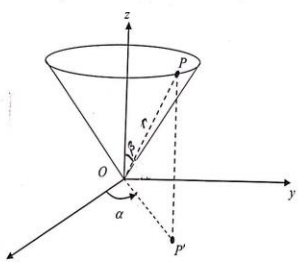
78

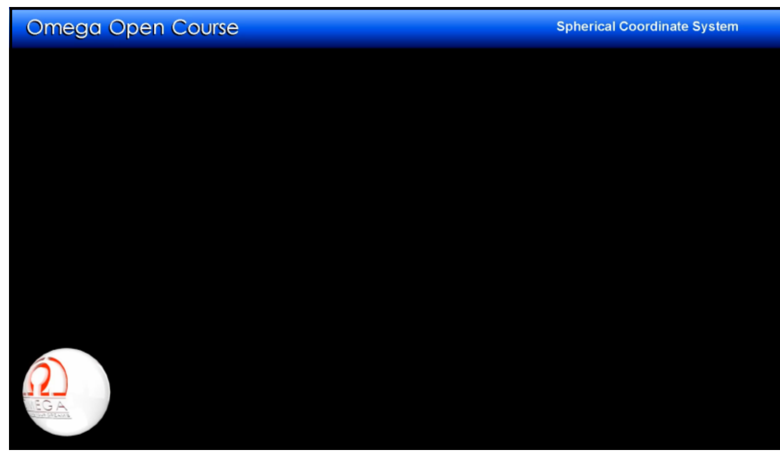
2) α=sabit olan $P(r,\alpha,\beta)$ noktaları z ekseninden geçen ve xOz düzlemi ile sabit α açısı yapan düzlem üzerinde bulunurlar.



79

3) β=sabit olan $P(r,\alpha,\beta)$ noktaları, tepe noktası orijin olan koni üzerinde bulunurlar.





Örnek: Küresel koordinatları $P(2, \pi/3, \pi/4)$ olan noktanın silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

Noktanın önce kartezyen koordinatlarını bulalım:

$r = 2,\ \alpha = \pi/3,\ \beta = \pi/4$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta = 2\cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ y = r\sin\alpha\sin\beta = 2\sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = \sqrt{6}/2 \\ z = r\cos\beta = 2\cos(\pi/4) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ P nin kartezyen koordinatları $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$ dir.

Şimdi bu noktanın silindirik koordinatlarını bulalım:

$x = \sqrt{2}/2,\ y = \sqrt{6}/2,\ z = \sqrt{2}$ $\qquad r = \mp\sqrt{x^2+y^2} = \mp\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan(y/x) = \arctan\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ, 240^\circ$

$r = \sqrt{2}$ için $\begin{cases} \overset{+}{x} = \overset{+}{r}\cos\alpha \\ \overset{+}{y} = \overset{+}{r}\sin\alpha \end{cases}$ olup $\cos\alpha > 0, \sin\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ olur.

$r = -\sqrt{2}$ için $\alpha = 240^\circ$ olur.

70

O halde,

$$P(r, \alpha, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}, \sqrt{2}\right)$$

bulunur.

Örnek: Silindirik koordinatları $P\left(-6, \frac{2\pi}{3}, 6\sqrt{3}\right)$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Cevap:

$$P\left(12, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(12, \frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right) = \left(-12, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) = \left(-12, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$$

85

Örnek: Küresel koordinatlarda verilen $2\tan^2\beta = 1$ denkleminin kartezyen koordinatlardaki karşılığını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases}$$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} 2\tan^2\beta = 1 &\Rightarrow 2\sin^2\beta = \cos^2\beta \\ &\Rightarrow 2r^2\sin^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 2r^2\cos^2\beta \\ &\Rightarrow 2r^2\sin^2\beta\cos^2\alpha + 2r^2\sin^2\beta\sin^2\alpha = 2r^2\cos^2\beta \\ &\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 2z^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 \end{aligned}$$

76

86

Örnek: Kartezyen koordinatları $P(1,1,-\sqrt{2})$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Cevap: $P(2,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}) = (2,\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{4}) = (-2,\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}) = (-2,\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$

75

87

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 6

88

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

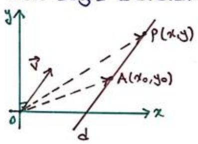
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

89

DÜZLEMDE DOĞRULAR

Verilen Bir Noktadan Geçen ve Verilen Bir Vektöre Paralel Olan Doğru Denklemi



$A(x_0, y_0)$ dan geçen ve $\vec{v}=(a,b)$ vektörüne paralel olan d doğrusunun denklemini bulalım: Doğru üzerinde keyfi bir $P(x,y)$ noktası alalım.

$\Rightarrow \vec{OA}+\vec{AP}=\vec{OP}$ dir.

P nin d üzerinde bulunma şartı,

$\boxed{\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\vec{v}}$ → doğrunun vektörel denklemi

$\Rightarrow (x,y)=(x_0,y_0)+\lambda(a,b)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0+\lambda a \\ y = y_0+\lambda b \end{cases}}$ → doğrunun parametrik denklemi

90

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}}$ → doğrunun kartezyen denklemi

$\Rightarrow bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$

$b=A$, $-a=B$, $-bx_0+ay_0=C$ alınırsa

$\boxed{Ax+By+C=0}$ Genel doğru denklemi

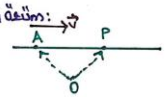
Not: Genel doğru denkleminde $(A,B)=(b,-a)=\vec{n}$ olup $\langle\vec{n},\vec{v}\rangle=0$ olduğundan $\vec{n}\perp\vec{v}$ dir.

Not: Doğruya paralel olan $\vec{v}$ vektörüne doğrunun doğrultman vektörü, doğruya dik olan $\vec{n}$ vektörüne de doğrunun normal vektörü denir.

91

Örnek: A(1,3) den geçen ve $\vec{v}=(2,-2)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik, kartezyen ve genel denklemini bulunuz.

Çözüm:



Doğru üzerinde keyfi bir nokta P(x,y) olsun.

$\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$

$\Rightarrow \vec{OP}=\vec{OA}+t\vec{v}$ → vektörel d.

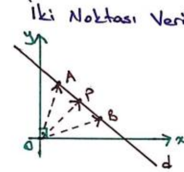
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=t$ kartezyen d.

$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-2t \end{cases}$ parametrik d.

$2x+2y-5=0$ genel d.

92

İki Noktası Verilen Doğru Denklemi



$A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulalım: Doğru üzerinde keyfi bir nokta $P(x,y)$ olsun.

$\Rightarrow \vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$

P nin d üzerinde bulunması şartı,

$\boxed{\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\vec{AB}}$ doğrunun vektörel denklemi

$\Rightarrow (x,y)=(x_1,y_1)+\lambda(x_2-x_1, y_2-y_1)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1+\lambda(x_2-x_1) \\ y = y_1+\lambda(y_2-y_1) \end{cases}}$ doğrunun parametrik denklemi

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}}$ doğrunun kartezyen denklemi

93

Örnek: $A(1,2)$ ve $B(3,4)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel, parametrik, kartezyen ve genel denklemini bulunuz.

94

Örnek: $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denkleminin

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Determinant açılırsa $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0 \ldots (1)$ bulunur. A ve B den geçen doğrunun denkleminin,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\Rightarrow (y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0 \ldots (2)$$

olduğunu biliyoruz.

(1) ve (2) den istenilen elde edilir.

95

Örnek: x eksenini $A(p,0)$, y eksenini $B(0,q)$ noktalarında kesen doğrunun denkleminin

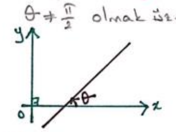
$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

olduğunu gösteriniz.

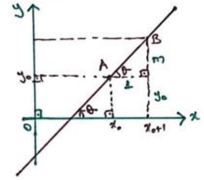
96

Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

Eğim: Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun eğim açısı denir. Eğim açısının ölçüsü θ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $m=\tan\theta$ sayısına doğrunun eğimi denir.



$A(x_0,y_0)$ dan geçen ve eğimi m olan d doğrusunun denklemini bulalım:



x_0 a 1 birimlik artma verelim. $\tan\theta=m$ olduğundan $B(x_0+1,y_0+m)\in d$ noktasını elde ederiz. İki noktası bilinen doğru denkleminden

$$\frac{y-y_0}{m}=\frac{x-x_0}{1}$$

$$\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)$$ olur.

97

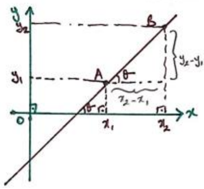
Not: Denklemde y tek başına bırakıldığında x in katsayısının eğimi verdiğine dikkat ediniz.

$B \neq 0$ olmak üzere $Ax+By+C=0$ genel doğru denklemi için $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ olacağından $m=-\frac{A}{B}$ olur.

Örnek: A(2,3) den geçen ve x ekseniyle $45°$ açı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

98

İki Noktası Verilen Doğrunun Eğimi



$A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım:

$m=\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ dir.

99

Örnek: A(7,3) noktasından geçen ve $\vec{n}=(5,2)$ vektörüne dik olan doğruyu bulunuz.

Çözüm:

Doğrunun doğrultmanı $\vec{v}=(a,b)$ olsun.

$\vec{v}\perp\vec{n}$ olacağından $\langle\vec{v},\vec{n}\rangle=0 \Rightarrow 5a+2b=0$ olur.

$b=5$ alınırsa $a=-2$ bulunur.

$\Rightarrow \vec{v}=(-2,5)$

$\Rightarrow d \ldots \frac{x-7}{-2}=\frac{y-3}{5}=t$

Örnek: A(1,2) den geçen ve x eksenine paralel olan doğruyu bulunuz.

Çözüm:

$\vec{v}=(1,0)$ alınabilir. $\quad d \ldots \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=t$

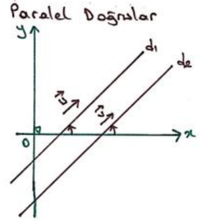
$\Rightarrow d \ldots y-2=0$

Not: Doğrultman vektörünün her katı da doğrultman vektörüdür.

86

100

Paralel Doğrular



$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$

veya

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$

Örnek: $d_1 \ldots \begin{cases} x=1+kt \\ y=3-4t \end{cases}$ $\quad d_2 \ldots \begin{cases} x=5+3\lambda \\ y=2+2\lambda \end{cases}$

doğrularının paralel olması için k ne olmalıdır?

Çözüm:

$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (k,-4)=a(3,2)$

$\Rightarrow k=3a,\ -4=2a \Rightarrow \frac{k}{3}=\frac{-4}{2} \Rightarrow k=-6$

87

101

Örnek: $A(-1,2)$ ve $B(1,a)$ dan geçen doğru $-3x+2y+6=0$ doğrusuna paralel ise $a=?$

Çözüm:

$m_1=m_2$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \frac{a-2}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=5$$

Not: $d_1 \ldots A_1x+B_1y+C_1=0$, $d_2 \ldots A_2x+B_2y+C_2=0$ doğrularının paralel olma koşulunu bulalım:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

88

102

Örnek:

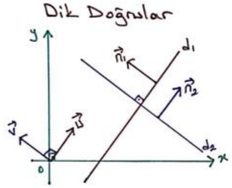
$d_1 \ldots 2x+ay+7=0$

$d_2 \ldots x+(a-2)y-2=0$

doğrularının paralel olması için a ne olmalıdır?

103

Dik Doğrular



$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ $(\langle \vec{u},\vec{v}\rangle=0)$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Örnek: $d_1 \ldots \begin{cases} x=2+2t \\ y=3+t \end{cases}$ $d_2 \ldots \begin{cases} x=-1+k\lambda \\ y=5+4\lambda \end{cases}$

doğruların dik olması için λ ne olmalıdır?

Çözüm:

$\vec{u}=(2,1)$, $\vec{v}=(k,4)$ $\quad \langle \vec{u},\vec{v}\rangle=2k+4=0 \Rightarrow k=-2$

104

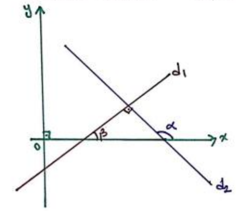
Not: $d_1 \ldots A_1x+B_1y+C_1=0$, $d_2 \ldots A_2x+B_2y+C_2=0$ genel denklemleriyle verilen doğruların diklik koşulunu bulalım:

$\vec{n}_1=(A_1,B_1)$, $\vec{n}_2=(A_2,B_2)$

$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

Not: d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri, sırası ile, m_1 ve m_2 olmak üzere $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2=-1$ dir.



$m_1=\tan\beta$, $m_2=\tan\alpha$

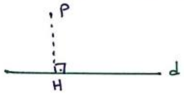
$m_2=\tan\alpha=\tan(90°+\beta)=-\cot\beta$

$\Rightarrow m_1 \cdot m_2=\tan\beta \cdot (-\cot\beta)=-1$ olur.

91

105

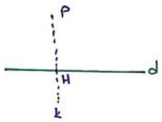
Bir Noktanın Bir Doğru Üzerine Dik İzdüşümü



Bir P noktasının d doğrusu üzerine olan H dik izdüşüm noktasını bulmak için P den geçen ve d ye dik olan doğru ile d doğrusunun denklemleri ortak çözülür.

Örnek: $P(5,3)$ noktasının $3x+4y-12=0$ doğrusu üzerine olan dik izdüşüm noktasını bulunuz.

Çözüm:



P den geçen ve d ye dik olan k doğrusunu bulalım: $m_d = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_k = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow k \ldots\ y-3 = \frac{4}{3}(x-5)$

$\Rightarrow k \ldots\ 4x-3y-11=0$

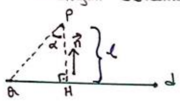
$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3y-11=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ bulunur.

92

106

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

$P(x_0,y_0)$ noktasının $d \ldots\ Ax+By+C=0$ doğrusuna olan uzaklığını bulalım:



$Q(x_1,y_1) \in d$ alalım.

$\Rightarrow Ax_1+By_1+C=0$ dır.

$\vec{PQ}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı α olmak üzere,

$\langle \vec{PQ}, \vec{n} \rangle = \|\vec{PQ}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos\alpha$

$= \|\vec{PQ}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \frac{\ell}{\|\vec{PQ}\|}$

$\Rightarrow \ell = \frac{|\langle \vec{PQ}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$ bulunur.

$\vec{PQ} = (x_1-x_0, y_1-y_0)$, $\vec{n} = (A,B) \Rightarrow \ell = \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

93

107

$\Rightarrow \ell = \frac{|Ax_1+By_1-Ax_0-By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$= \frac{|-Ax_0-By_0-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$= \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Örnek: $P(3,5)$ noktasının $5x+12y+3=0$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

94

108

MATEMATİK BÖLÜMÜ

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 7

109

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

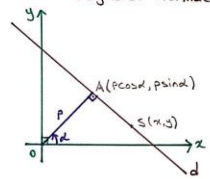
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8

110

Bir Doğrunun Normal Formu (Hesse Formu)



Bir d doğrusunun denklemini O dan d ye olan uzaklık ve bu dikmenin x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı cinsinden bulabiliriz. Buna doğrunun normal formu denir.

d üzerinde keyfi bir nokta $S(x,y)$ olsun. $\langle \vec{OA}, \vec{AS} \rangle = 0$ dır.

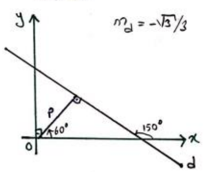
$\Rightarrow p\cos\alpha\,(x - p\cos\alpha) + p\sin\alpha\,(y - p\sin\alpha) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - p = 0}$ doğrunun normal formu

111

Örnek: Denklemi $x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ olan d doğrusunun normal formunu bulunuz.

Çözüm:



$m_d = -\sqrt{3}/3$

$p = \frac{|-4|}{\sqrt{1+3}} = 2$

$\alpha = 60° \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}, \ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - p = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2 = 0$ bulunur.

96

112

Not: Doğrunun normal formunu kısa yoldan da bulabiliriz:

$Ax + By + C = 0$ genel doğru denklemini $k \neq 0$ ile çarpalım

$\Rightarrow kAx + kBy + kC = 0 \ldots (1)$

Doğrunun normal formu

$\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - p = 0 \ldots (2)$

Bu iki denklemi karşılaştırarak k çarpanını bulalım:

$\cos\alpha = kA, \ \sin\alpha = kB, \ kC = -p$ olur.

$\Rightarrow k^2(A^2 + B^2) = 1 \Rightarrow k = \mp \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

O halde genel denklemi normal denkleme çevirmek için denklemin her iki yanını $\mp \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ile çarpmak gerekir.

Kökün İşaretinin Belirlenmesi

$kC = -p$ olduğundan $kC < 0$ dır. Yani C ile k zıt işaretlidir.

97

113

Örnek: $3x-4y-8=0$ doğrusunun normal formunu bulunuz.

Çözüm:

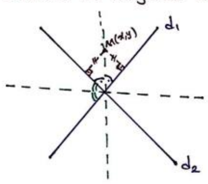
$$k=\mp\frac{1}{5} \qquad C=-8<0 \Rightarrow k=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{8}{5}=0$$

98

114

Kesişen İki Doğrunun Açıortay Doğruları



$d_1 \ldots A_1x+B_1y+C_1=0$

$d_2 \ldots A_2x+B_2y+C_2=0$

Açıortay üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına olan uzaklığı eşit olacağından,

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\mp\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

99

115

Örnek: $3x-3y+4=0$ ve $x+y+8=0$ doğrularının oluşturduğu açıortay doğrularının denklemini bulunuz.

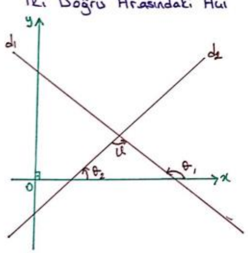
Çözüm:

$$\frac{3x-3y+4}{\sqrt{9+9}}=\mp\frac{x+y+8}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow 3y+1=0 \text{ ve } 3x+5=0$$

100

116

İki Doğru Arasındaki Açı



$m_{d_1}=\tan\theta_1$, $m_{d_2}=\tan\theta_2$

$\theta_1=\alpha+\theta_2$

$$\tan\alpha=\tan(\theta_1-\theta_2)$$

$$=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{m_{d_1}-m_{d_2}}{1+m_{d_1}\cdot m_{d_2}}$$

101

Örnek: $x-4y+3=0$ ve $3x+5y-4=0$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$$m_1=\frac{1}{4}\ ,\quad m_2=\frac{-3}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$$

Diğer açı $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Doğru Demeti

Teorem: $A_1x+B_1y+C_1=0$ ve $A_2x+B_2y+C_2=0$ doğrularının kesim noktası $S(x_0,y_0)$ olsun. α ve β nın ikisi birden aynı anda sıfır olmamak koşulu ile

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

denklemi S den geçen bir doğru belirtir.

İspat;

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

denkleminin bir doğru belirttiğini gösterelim: Bu denklem düzenlenirse

$$(A_1\alpha+A_2\beta)x+(B_1\alpha+B_2\beta)y+C_1\alpha+C_2\beta=0$$

olur. Bu denklemin bir doğru belirtmesi için

$A_1\alpha+A_2\beta$ ve $B_1\alpha+B_2\beta$ nın aynı anda sıfır olmaması gerekir.

Kabul edelim ki,

$$B_2\ /\ A_1\alpha+A_2\beta=0$$
$$-A_2\ /\ B_1\alpha+B_2\beta=0 \quad \text{olsun}$$
$$\Rightarrow (A_1B_2-B_1A_2)\alpha=0\ldots(1)$$

olur.

$$-B_1\ /\ A_1\alpha+A_2\beta=0$$
$$A_1\ /\ B_1\alpha+B_2\beta=0$$
$$\Rightarrow (A_1B_2-B_1A_2)\beta=0\ldots(2)$$

Hipotezden α ve β dan en az biri sıfırdan farklı olacağından (1) ve (2) den

$$A_1B_2-B_1A_2=0 \text{ dır.}$$
$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \text{ olur.}$$
$$\Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

Bu ise d_1 ve d_2 nin S de kesişmesi ile çelişir.

O halde $A_1\alpha+A_2\beta$ ve $B_1\alpha+B_2\beta$ aynı anda sıfır olamaz.

$$\Rightarrow \alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

denklemi bir doğru belirtir.

Ayrıca S iki doğrunun da kesim noktası olduğundan doğruların denklemini sağlar.

$$\Rightarrow A_1x_0+B_1y_0+C_1=0 \text{ ve } A_2x_0+B_2y_0+C_2=0 \text{ dır.}$$
$$\Rightarrow \alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0$$

olup $\alpha(A_1x+B_1y+C)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ denklemi S den geçen bir doğru belirtir.

Tanım: Düzlemin bir S noktasından geçen iki doğru $A_1x+B_1y+C_1=0$ ve $A_2x+B_2y+C_2=0$ olmak üzere S den geçen tüm doğrulara **S deki doğru demeti** denir. Doğru demetinin denklemi

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \text{dır.}$$

Not: $\alpha \neq 0$ için $\lambda=\beta/\alpha$ alınırsa doğru demeti için

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Uyarı: Son denklem de S den geçen tüm doğruların denklemidir. Fakat bu denklem $A_2x+B_2y+C_2=0$ doğrusunu vermez.

Örnek: $x+2y-8=0$ ve $3x-y-3=0$ doğrularının S kesim noktasından ve $A(-1,3)$ den geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

S den geçen tüm doğruların denklemi,

$$x+2y-8+\lambda(3x-y-3)=0$$

dır. Aradığımız doğru A dan geçeceğinden A noktası yukarıdaki denklemi sağlar.

$\Rightarrow \lambda=-1/3$ olur.

$\Rightarrow y-3=0$ elde edilir.

Örnek: $x+2y-8=0$ ve $3x-y-3=0$ doğrularının S kesim noktasından geçen ve $x+2y+7=0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

S den geçen tüm doğrular,

$$x+2y-8+\lambda(3x-y-3)=0$$

denklemine sahiptir. Bu doğruların eğimleri $\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}$ şeklindedir.

Diklik koşulundan,

$$\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Rightarrow \lambda=-5 \text{ olur.}$$

$\Rightarrow 2x-y-1=0$ bulunur.

Örnek: $x+2y-8=0$ ve $3x-y-3=0$ doğrularının S kesim noktasından geçen ve $3x-y+8=0$ doğrusuna paralel olan doğruyu bulunuz.

$(3x-y-3=0)$

125

Örnek: $3x+4y+9=0$ doğrusunun $2x+y+1+\lambda(x-3y-10)=0$ demetine ait olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Demetin ortak noktası $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-3y-10=0 \end{cases}$ dan $K(1,-3)$ dir.

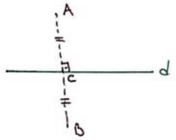
$3.1+4.(-3)+9=0$ olup K noktası $3x+4y+9=0$ doğrusunun da üzerindedir.

110

126

Örnek: $A(1,4)$ noktasının $3x-2y-8=0$ doğrusuna göre simetriği olan $B(\alpha,\beta)$ noktasını bulunuz.

Çözüm:



$C\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+4}{2}\right)$ dir.

$C \in d$ olduğundan

$$3\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-2\left(\frac{\beta+4}{2}\right)-8=0$$

$$\Rightarrow 3\alpha-2\beta=21 \ldots (1)$$

$m_{AB}=\frac{\beta-4}{\alpha-1}$, $m_d=\frac{3}{2}$ $\qquad m_{AB}\cdot m_d=-1$

$$\Rightarrow 2\alpha+3\beta=14 \ldots (2)$$

(1) ve (2) dan $B(7,0)$ bulunur.

111

127

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8

128

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

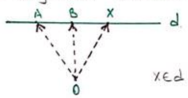
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

UZAYDA DOĞRU

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

Uzayda $A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulalım: Doğru üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.



$\Rightarrow \vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$

$X \in d$ olması için

$\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB}}$ Doğrunun vektörel denklemi

olmalıdır.

$\Rightarrow (x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$

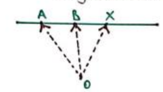
$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2-x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2-y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2-z_1) \end{cases}}$ Doğrunun parametrik denklemi

$\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = \lambda}$ Doğrunun kartezyen denklemi

Örnek: $A(-1,3,5)$, $B=(2,4,7)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm:

Doğru üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.



$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$

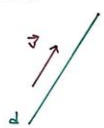
$\Rightarrow \vec{OX} = \vec{OA} + \lambda AB \rightarrow$ vektörel d.

$\dfrac{x-(-1)}{2-(-1)} = \dfrac{y-4}{4-3} = \dfrac{z-5}{7-5} = \lambda$

$\Rightarrow \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2} = \lambda \rightarrow$ kartezyen d.

$\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 4+\lambda \\ z = 5+2\lambda \end{cases} \rightarrow$ parametrik d.

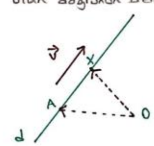
Tanım: Doğruya paralel olan vektöre doğrunun doğrultman vektörü denir.



Doğrultman vektörünün katı da $(\lambda\vec{v})$ yine doğrultman vektörüdür.

Bir Noktası ve Doğrultman Vektörü Verilen Doğrunun Denklemi

$A(x_1,y_1,z_1)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{v}=(a,b,c)$ olan doğrunun denklemini bulalım:



Doğru üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.

$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$ dir.

X in d üzerinde bulunması şartı:

$\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda\vec{v}}$ Doğrunun vektörel denklemi

$(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + \lambda(a,b,c)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + \lambda a \\ y = y_1 + \lambda b \\ z = z_1 + \lambda c \end{cases}}$ Doğrunun parametrik denklemi

$\boxed{\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c} = \lambda}$ Doğrunun kartezyen denklemi

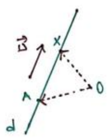
133

Not: Parametrik yazılışta parametrenin katsayıları, kartezyen yazılışta ise paydadaki sayılar doğrultman vektörünü oluşturur.

Not: Parametreye verilen her değer için doğru üzerinde bir nokta elde edilir.

Örnek: $A(1,0,3)$ noktasından geçen ve $\vec{u}=(-1,2,5)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm:



$\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{AX}$

$\Rightarrow \vec{OX}=\vec{OA}+\lambda\vec{u}$ vektörel d.

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-3}{5}=\lambda$ kartezyen d.

$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=3+5\lambda \end{cases}$ parametrik d.

116

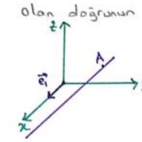
134

Örnek: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{0}=t$ denklemi, doğrultmanı $\vec{v}=(2,3,0)$ olan ve $t=0$ için $A(1,-2,0)$ noktasından geçen bir doğru belirtir.

Örnek:

$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=3 \\ z=-t \end{cases}$ denklemi, doğrultmanı $\vec{v}=(3,0,-1)$ olan ve $t=0$ için $A(-1,3,0)$ noktasından geçen bir doğru belirtir.

Örnek: $A(1,1,2)$ noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.



Doğrunun doğrultmanı $\vec{u}=\vec{e_1}=(1,0,0)$ alınabilir.

$\Rightarrow d \ldots \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{0}=\lambda$

$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

117

135

Örnek: x ekseninin denklemini yazınız.

Çözüm:

$A(1,0,0)$ dan geçen ve doğrultmanı $\vec{u}=(1,0,0)$ olan doğru olarak düşünülebilir.

$\Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0}=\lambda$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Örnek: y ve z eksenlerinin denklemlerini yazınız.

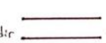
118

136

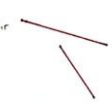
İki Doğrunun Birbirine Göre Durumu

Uzayda d_1 ve d_2 doğruları verilsin. Bu iki doğru için dört durum söz konusudur:

1) d_1 ve d_2 çakışıktır $d_1=d_2$

2) d_1 ve d_2 paraleldir  $d_1 \parallel d_2$

3) d_1 ve d_2 bir noktada kesişir  $d_1 \cap d_2=\{K\}$

4) d_1 ve d_2 aykırıdır 

Not: Aykırı doğrular aynı düzlem içine alınamayan doğrulardır.

119

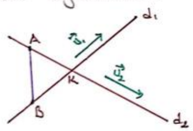
d_1 in doğrultmanı u_1 ve d_2 nin doğrultmanı da $\vec{u}_2$ olsun.

a) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ $(\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2)$ ise d_1 ile d_2 ya çakışıktır ya da paraleldir.

$A \in d_1$ için $A \in d_2$ ise d_1 ile d_2 çakışıktır.

$A \in d_1$ için $A \notin d_2$ ise d_1 ile d_2 paraleldir.

b) $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ $(\vec{u}_1 \neq \lambda \vec{u}_2)$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişirler ya da aykırıdırlar.



$A \in d_1$, $B \in d_2$ için $\langle \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2, \vec{AB} \rangle = 0$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişir. Yani, $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = 0$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişir.

Eğer $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) \neq 0$ ise d_1 ile d_2 aykırıdır.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3t \\ z = -1+t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2} = \lambda$$

doğruların birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (1,3,1)$, $\vec{u}_2 = (3,5,2)$ dir. $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ olduğundan d_1 ile d_2 ya bir noktada kesişir ya da aykırıdır.

$t = 0$ için $A(2,0,-1) \in d_1$, $\lambda = 0$ için $B(1,0,-1) \in d_2$ alalım.

$\Rightarrow \vec{AB} = (-1,0,0)$ olur.

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1).1 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow d_1$ ile d_2 aykırıdır.

Örnek: $d_1 \ldots \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z}{0} = \lambda$ ve $d_2 \ldots \begin{cases} x = -1+3t \\ y = -9+t \\ z = 2t \end{cases}$

doğruların birbirine göre durumunu irdeleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (-1,4,0)$, $\vec{u}_2 = (3,1,2)$ dir. $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ olduğundan d_1 ile d_2 ya bir noktada kesişir ya da aykırıdır.

$\lambda = 0$ için $A(-2,-5,0) \in d_1$, $t = 0$ için $B(-1,-9,0) \in d_2$ alalım.

$\vec{AB} = (1,-4,0)$ olur.

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1).8 - 4.(-2) + 0 = 0$$

O halde d_1 ile d_2 bir noktada kesişir.

Örnek:

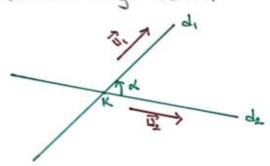
$$d_1 \ldots \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3 \\ z = 2+2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2} = \lambda$$

doğruların birbirine göre durumunu inceleyiniz.

141

Kesişen İki Doğru Arasındaki Açı

Kesişen iki doğru arasındaki açı bu doğruların doğrultmanları arasındaki açıya eşittir.



$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\| . \cos\alpha$

142

Kesişen İki Doğrunun Arakesit Noktasının Bulunması

$d_1 \cap d_2 = \{K\}$ ve $K = (x_0, y_0, z_0)$ olsun.

$K \in d_1$ ve $K \in d_2$ olduğu kullanılıp denklemler ortak çözülerek K bulunur.

143

Örnek:

$d_1 \ldots \dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{y}{3} = z = \lambda$

$d_2 \ldots \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z+1}{3} = t$

doğrularının bir noktada kesiştiğini gösteriniz, arakesit noktasını bulunuz, doğrular arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$d_1 \ldots \dfrac{x+5/2}{3/2} = \dfrac{y}{3} = z = \lambda$

$\Rightarrow \vec{u}_1 = (3,6,2)$ alınabilir.

$\vec{u}_2 = (2,4,3)$ olup $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$ dir.

$\lambda = 1$ için $A(-1,3,1) \in d_1$, $t = 0$ için $B(-4,-3,-1) \in d_2$

$\Rightarrow \vec{AB} = (-3,-6,-2)$

$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan d_1 ve d_2 bir noktada kesişir.

144

$d_1 \cap d_2 = \{K\}$ ve $K(x_0, y_0, z_0)$ olsun.

$K \in d_1$ olduğundan $x_0 = \frac{3}{2}\lambda - \frac{5}{2}$, $y_0 = 3\lambda$, $z_0 = \lambda$

$K \in d_2$ olduğundan $x_0 = 2t-4$, $y_0 = 4t-3$, $z_0 = 3t-1$ olur.

$\Rightarrow \begin{matrix} 3\lambda = 4t-3 \\ \lambda = 3t-1 \end{matrix} \Rightarrow 9t-3 = 4t-3$

$\Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow K(x_0, y_0, z_0) = (-4,-3,-1)$ bulunur.

d_1 ile d_2 arasındaki açı α olsun. O halde $\vec{u}_1$ ile $\vec{u}_2$ arasındaki açı da α olur.

$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\| . \cos\alpha$, $\vec{u}_1 = (3,6,2)$, $\vec{u}_2 = (2,4,3)$

$\Rightarrow 36 = \sqrt{49} . \sqrt{29} \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{36}{7\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{36}{7\sqrt{29}}\right)$

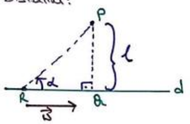
Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 0 \\ z = -5+4t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2} = \lambda$$

doğrularının arakesit noktasından geçen ve $\vec{u} = (1,-3,2)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir P noktasının bir d doğrusuna olan uzaklığını bulalım:



Bir $R \in d$ alalım. $\vec{RP}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı α olsun.

$$\Rightarrow \|\vec{RP} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{RP}\| . \|\vec{u}\| . \sin\alpha$$

$$= \|\vec{RP}\| . \|\vec{u}\| . \frac{\ell}{\|\vec{RP}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\|\vec{RP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$$ bulunur.

Örnek: $P(1,1,-1)$ noktasının $d \ldots \frac{x-1}{3} = y = 2z = \lambda$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u} = (3, 1, \frac{1}{2}) \Rightarrow \vec{u} = (6,2,1)$ alınabilir.

$\lambda = 0$ için $R = (1,0,0) \in d$ alalım.

$$\ell = \frac{\|\vec{RP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$ idi. $\vec{RP} = (0,1,-1)$

$$\Rightarrow \vec{RP} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3,-6,-6)$$

$$\Rightarrow \|\vec{RP} \wedge \vec{u}\| = \|3(1,-2,-2)\| = 3.\sqrt{9} = 9$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{41}$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{9}{\sqrt{41}}$$ bulunur.

Örnek: $A(-1,2,-2)$ noktasının $d \ldots \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+3t \\ z = -2t \end{cases}$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

Not: Paralel doğrular arasındaki uzaklık bulunurken, doğruların birinden bir nokta alınıp bu noktanın diğer doğruya olan uzaklığı bulunur.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1+5t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x+1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{2} = \lambda$$

doğrularının paralel olduğunu gösteriniz. Aralarındaki uzaklığı bulunuz.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

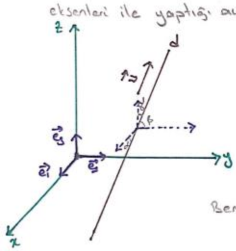
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10

Bir Doğrunun Koordinat Eksenleri ile Yaptığı Açılar Cinsinden Denklemi

Bir $d \ldots \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = \lambda$ doğrusunun x, y ve z eksenleri ile yaptığı açılar, sırası ile, α, β ve γ olsun.



O halde; $\vec{u}$ ile $\vec{e_1}$ arasındaki açı α,
$\vec{u}$ ile $\vec{e_2}$ arasındaki açı β,
$\vec{u}$ ile $\vec{e_3}$ arasındaki açı γ olur.

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{e_1} \rangle = \|\vec{u}\| . \|\vec{e_1}\| . \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Benzer şekilde $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ bulunur.

153

Bu eşitlikler d nin denkleminde yerine yazılırsa,

$$d \ldots \frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} = \underbrace{\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{d \ldots \frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} = t}$$ bulunur.

Ayrıca $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$ olup $\boxed{\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$ alınabilir.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ ve $\cos\gamma$ ya d doğrusunun doğrultu kosinüsleri denir.

134

154

Örnek: $A(3,-5,4)$ ve $B(-6,1,2)$ noktalarından geçen doğrunun doğrultu kosinüslerini bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u} = \vec{AB} = (-9,6,-2)$ dir.

$\Rightarrow a=-9,\ b=6,\ c=-2$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-9}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{6}{11}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = -\frac{2}{11}$$ bulunur.

135

155

Örnek: $A(0,2,3)$ noktasından geçen, x ekseniyle 120° ve y ekseniyle 60° açı yapan d doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

d nin eksenler ile yaptığı açılara α, β ve γ dersek, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$ olur.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-0}{\cos\alpha} = \frac{y-2}{\cos\beta} = \frac{z-3}{\cos\gamma} = \lambda$$

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x}{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\mp\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lambda$$ olur.

136

156

Örnek:

$$d_1 \ldots \frac{x-1}{n} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} = \lambda \text{ ve } d_2 \ldots \frac{x}{3} = \frac{y}{2m} = \frac{z+2}{1} = t$$

doğrularının paralel olması için m ve n ne olmalıdır?

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (n,1,2)$, $\vec{u}_2 = (3,2m,1)$

$\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ yani $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ olmalıdır.

$\Rightarrow (n,1,2) = k(3,2m,1)$

$\Rightarrow n = 3k,\ 1 = 2mk,\ 2 = k$

$\Rightarrow n = 6,\ m = 1/4$

137

157

Örnek: $A(-1,2,-3)$ noktasından geçen, $\vec{u}=(6,-2,-3)$ vektörüne dik olan ve $d_1 \ldots \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}=\lambda$ doğrusunu kesen d doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$d \ldots \frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z+3}{c}=t \;,\; \vec{u}_d=(a,b,c) \text{ olsun.}$$

$\vec{u}_d \perp \vec{u} \Rightarrow 6a-2b-3c=0 \ldots (1)$

$\lambda=0$ için $B(1,-1,3)\in d_1$ olup d ile d_1 in kesişmesi şartı,

$\det(\vec{u}_d, \vec{u}_{d_1}, \vec{AB})=0$ dır.

$\vec{AB}=(2,-3,6)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3a-28b-13c=0 \ldots (2)$$

(1) ve (2) de $c=1$ alınırsa $b=-\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{3}$ bulunur.

138

158

$\Rightarrow \vec{u}_d=(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},1\right)$

$\Rightarrow \vec{u}_d=(2,-3,6)$ alınabilir.

$\Rightarrow d \ldots \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}=t$ bulunur.

139

159

Örnek: $A(2,0,-2)$ noktasından geçen ve

$d_1 \ldots \dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-1}{2}=\lambda$, $d_2 \ldots \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}=t$

doğrularına dik olan d doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$d \ldots \frac{x-2}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z+2}{c}=k \;,\; \vec{u}_d=(a,b,c) \text{ dir.}$$

$d \perp d_1 \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow \vec{u}_{d_1}=(2,1,2)$ olduğundan $2a+b+2c=0$

$d \perp d_2 \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2} \Rightarrow \vec{u}_{d_2}=(3,-1,2)$ olduğundan $3a-b+2c=0$

$c=1$ için $a=-\frac{4}{5}$ ve $b=-\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \vec{u}_d=\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},1\right) \Rightarrow \vec{u}_d=(-4,-2,5)$ alınabilir.

$\Rightarrow d \ldots \dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{5}=k$ bulunur.

140

160

2. yol:

$\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1}$ ve $\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2}$ olduğundan $\vec{u}_d=\vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2}$ alınabilir.

$$\Rightarrow \vec{u}_d=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(4,2,-5) \text{ olur.}$$

$\Rightarrow d \ldots \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-5}=k$ bulunur.

141

161

Örnek: $A(2,0,-3)$ noktasından geçen ve y eksenine paralel olan d_1 doğrusu ile

$$d_2 \ldots \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \\ z = 0 \end{cases}$$

doğrusunun birbirine göre durumunu irdeleyiniz.

142

162

Örnek: $A(3,1,-2)$ noktasından geçen ve $d_1 \ldots \begin{cases} x = -1+t \\ y = -2+t \\ z = -1+t \end{cases}$ doğrusunu dik kesen d doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$d \ldots \dfrac{x-3}{a} = \dfrac{y-1}{b} = \dfrac{z+2}{c} = \lambda$ olsun. $\vec{u}_d = (a,b,c)$, $\vec{u}_{d_1} = (1,1,1)$ dir.

$d \perp d_1$ old. dan $\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow a+b+c=0 \ldots (1)$

d ile d_1 in kesişme şartını yazalım:

$t=0$ için $B(-1,-2,-1) \in d_1 \Rightarrow \vec{AB} = (-4,-3,1)$

$\det(\vec{u}_d, \vec{u}_{d_1}, \vec{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a-5b+c=0 \ldots (2)$

(1) ve (2) den $b=1$ için $a=2$, $c=-3$ olur. O halde $\vec{u}_d = (2,1,-3)$ elde edilir.

$\Rightarrow d \ldots \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-3} = \lambda$ bulunur.

143

163

Örnek:

$d_1 \ldots \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2m}{1} = \dfrac{z-1}{1} = \lambda$ ve $d_2 \ldots \dfrac{x-m}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1} = t$

doğruların kesişmesi için m ne olmalıdır?

Çözüm:

$\vec{u}_{d_1} = (2,1,1)$, $\vec{u}_{d_2} = (1,2,1)$ dir.

$\lambda = 0$ için $A(0,2m,1) \in d_1$, $t=0$ için $B(m,0,1) \in d_2$

$\Rightarrow \vec{AB} = (m,-2m,0)$

$\det(\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}, \vec{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & -2m & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 4m+m-4m=0 \Rightarrow m=0$

144

164

Örnek: $A(1,0,0)$ dan geçen, $d_1 \ldots \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1} = \lambda$ ve $d_2 \ldots \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3} = t$ doğrularını kesen d doğrusunu bulunuz.

145

165

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 10

166

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11

167

UZAYDA DÜZLEM

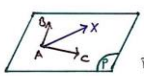
Düzlem denilince üzerinde hiçbir girintisi veya çıkıntısı olmayan, sonsuza kadar uzanan ve derinliği bulunmayan bir satıh kastedilir. Şimdi çeşitli elemanları verilen düzlem denkleminin nasıl bulunacağını inceleyelim:

166

168

Doğrudaş Olmayan Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi

Geometri aksiyomlarına göre doğrudaş olmayan yani aynı doğru üzerinde bulunmayan üç nokta bir düzlem belirtir. $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ ve $C(x_3,y_3,z_3)$ doğrudaş olmayan üç nokta olsun. Bu üç noktadan geçen düzleme P diyelim.



$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{n}$ alınırsa

$\vec{n} \perp \vec{AB}$ ve $\vec{n} \perp \vec{AC}$ olup $\vec{n} \perp P$ dir.

Düzlem üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun. $\vec{n} \perp P$ olduğundan $\vec{n} \perp \vec{AX}$ dir. Yani $\langle \vec{n}, \vec{AX} \rangle = 0$ dır.

$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (a,b,c)$, $\vec{AX} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ olmak üzere,

$$\langle \vec{n}, \vec{AX} \rangle = a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

$$\Rightarrow ax+by+cz \underbrace{-ax_1-by_1-cz_1}_{d} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{ax+by+cz+d=0}$$ P nin denklemidir.

167

Sonuç: a, b ve c katsayılarının üçü birden sıfır olmamak şartıyla $ax+by+cz+d=0$ denklemi uzayda düzlem belirtir. Düzleme dik olan $\vec{n}=(a,b,c)$ vektörüne de düzlemin normali adı verilir.

Örnek:

$2x+y-z+1=0$, normali $\vec{n}=(2,1,-1)$ olan düzlemdir.

$x+z-1=0$, normali $\vec{n}=(1,0,1)$ olan düzlemdir.

$y-2=0$, normali $\vec{n}=(0,1,0)$ olan düzlemdir.

Örnek:

$x=0$ denklemi 1-boyutlu uzayda ($\mathbb{R}$) nokta, 2-boyutlu uzayda ($\mathbb{R}^2$) doğru ve 3-boyutlu uzayda da ($\mathbb{R}^3$) düzlem belirtir.

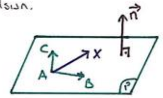
Örnek:

$2x+y-1=0$ denklemi $\mathbb{R}^2$ de bir doğru, $\mathbb{R}^3$ de ise düzlem belirtir.

Örnek: $A(1,-1,2)$, $B(2,0,1)$, $C(3,1,1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm:

Aradığımız düzleme P diyelim. P de keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.



$\vec{AB}=(1,1,-1)$, $\vec{AC}=(2,2,-1)$

$$\vec{n}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=(1,-1,0)$$

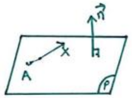
$\vec{AX}\perp\vec{n} \Rightarrow \langle\vec{AX},\vec{n}\rangle=0$

$AX=(x-1,\ y+1,\ z-2)$, $\vec{n}=(1,-1,0)$

$\Rightarrow x-1+(-1)(y+1)=0$

$\Rightarrow x-y-2=0$

Bir Noktası ve Normali Verilen Düzlem Denklemi



$A(x_1,y_1,z_1)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n}=(a,b,c)$ olan düzlemin denklemini bulalım: Düzlem üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun. $\vec{n}\perp P \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AX} \Rightarrow \langle\vec{AX},\vec{n}\rangle=0$ dır.

$\vec{AX}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$, $\vec{n}=(a,b,c)$

$\Rightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

$\Rightarrow ax+by+cz\underbrace{-ax_1-by_1-cz_1}_{d}=0$

$\Rightarrow ax+by+cz+d=0$

Veya; $\vec{n}=(a,b,c)$ olduğundan

$P\ldots\ ax+by+cz+d=0$ şeklindedir.

$A\in P$ olduğu kullanılarak d bulunur.

Örnek: $A(1,-1,1)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n}=(2,3,2)$ olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

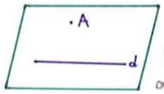
$P\ldots\ 2x+3y+2z+d=0$ şeklindedir.

$A\in P \Rightarrow 2-3+2+d=0 \Rightarrow d=-1$

$\Rightarrow P\ldots\ 2x+3y+2z-1=0$ bulunur.

173

Bir Doğru ve Bu Doğrunun Dışındaki Bir Noktadan Geçen Düzlem Denklemi



Bir d doğrusu ve bu doğrunun dışındaki A noktasından geçen düzlemin denklemini bulmak için doğru üzerinde B ve C noktaları alınır ve doğrudaş olmayan A, B ve C noktalarından geçen düzlemin denklemi bulunur.

174

Örnek:

$$d \ldots \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$$ ve $A(1,0,2)$ noktasının belirttiği düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$t=0$ için $B(1,0,0) \in d$, $t=1$ için $C(3,3,3) \in d$ alalım.

$\vec{AB} = (0,0,-2)$, $\vec{AC} = (2,3,1)$ olur.

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (6,-4,0)$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad 6x - 4y + d = 0$$

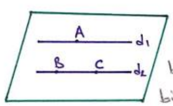
$$A \in P \Rightarrow 6 + d = 0 \Rightarrow d = -6$$

$$\Rightarrow 6x - 4y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2y - 3 = 0$$

175

Paralel iki Doğrunun Belirttiği Düzlem



$d_1 \parallel d_2$ olmak üzere d_1 ve d_2 doğrularının belirttiği düzlemin denklemi bulunurken doğruların birinden bir nokta ve diğerinden de iki nokta alınıp doğrudaş olmayan üç noktadan geçen düzlemin denklemi bulunur.

176

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$ doğrularının paralel olduğunu gösteriniz. Belirttikleri düzlemi bulunuz.

Çözüm:

$t=0$ için $A(2,1,0) \in d_1$, $t=1$ için $B(5,2,2) \in d_1$ ve $\lambda=0$ için $C(1,-2,1) \in d_2$ noktalarını alalım.

$\Rightarrow \vec{AB} = (3,1,2)$, $\vec{AC} = (-1,-3,1)$ olur.

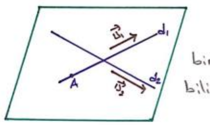
$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (7,-5,-8)$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad 7x - 5y - 8z + d = 0$$

$$A \in P \Rightarrow 14 - 5 + d = 0 \Rightarrow d = -9$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad 7x - 5y - 8z - 9 = 0$$

Kesişen İki Doğrunun Belirttiği Düzlem



$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{n}$ olarak alınabilir. Doğruların birinden bir nokta alınıp noktası ve normali bilinen düzlem denklemi bulunur.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \begin{cases} x = -4+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = -4+\lambda \end{cases}$$

doğrularının bir noktada kesiştiğini gösteriniz. d_1 ve d_2 nin belirttiği düzlemi bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (3,1,2)$, $\vec{u}_2 = (1,2,1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-1,5)$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad -3x - y + 5z + d = 0$$

$t=0$ için $A(2,1,0) \in d_1$

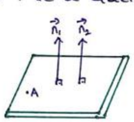
$A \in P \Rightarrow -6-1+d=0 \Rightarrow d=7$

$P \ldots \quad 3x+y-5z-7=0$

İki Düzlemin Birbirine Göre Durumu

$P \ldots a_1x + a_2y + a_3z + d_1$ ve $Q \ldots b_1x + b_2y + b_3z + d_2 = 0$ düzlemleri verilsin. P nin normali $\vec{n}_1 = (a_1,a_2,a_3)$, Q nun normali $\vec{n}_2 = (b_1,b_2,b_3)$ olur.

1) P ve Q Çakışıktır ($P=Q$)



$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ dir. $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

$$\Rightarrow (a_1,a_2,a_3) = \lambda(b_1,b_2,b_3) \Rightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

olur. Ayrıca $A(x_1,y_1,z_1) \in P$ için $A \in Q$ dur.

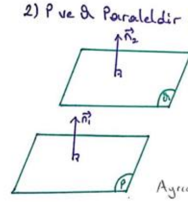
$A \in P \Rightarrow a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 + d_1 = 0 \Rightarrow \lambda b_1x_1 + \lambda b_2y_1 + \lambda b_3z_1 + d_1 = 0$

$A \in Q \Rightarrow b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 + d_2 = 0$

$\Rightarrow d_1 = \lambda d_2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{d_1}{d_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}} \quad \text{olur.}$$

2) P ve Q Paraleldir ($P \parallel Q$)



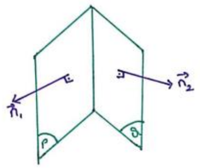
$\vec{n}_1 = (a_1,a_2,a_3)$ ve $\vec{n}_2 = (b_1,b_2,b_3)$ için $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ dir.

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad \text{olur.}$$

Ayrıca $A \in P$ için $A \notin Q$ dur.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{d_1}{d_2}}$$

3) P ve Q Bir Doğru Boyunca Kesişir ($P \cap Q = \{d\}$)



$\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ için $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ dir.

$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}}$ veya $\boxed{\frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}}$ olur.

Örnek: $x+2y-z+1=0$ ve $3x+6y-3z+3=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

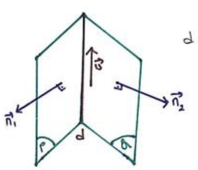
Çözüm:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ olup düzlemler çakışıktır.

Örnek: $x+y-z-1=0$ ve $x+y+z-1=0$ düzlemleri bir doğru boyunca kesişirler. Çünkü,

$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ dir

Bir Doğru Boyunca Kesişen İki Düzlemin Arakesit Doğrusunun Bulunması



$P \cap Q = \{d\}$ olsun.

$d \ldots (P=0, Q=0)$ şeklinde gösterilir.

d doğrusu aşağıdaki şekilde bulunabilir:

1) $\vec{n}_1 \perp P \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u}$, $\vec{n}_2 \perp Q \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{u}$

O halde $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ alınabilir.

P ve Q nun denklemlerinin ortak çözümüne ait bir nokta bulunup noktası ve doğrultmanı bilinen doğru denkleminden d bulunur.

2) P ve Q nun denklemleri ortak çözülür. İki denklem üç bilinmeyen olduğundan bir parametreye bağlı çözüm bulunur. Bu ise d nin denklemidir.

3) P ve Q nun denklemlerinin ortak çözümüne ait iki nokta bulunup iki noktası bilinen doğru denkleminden d bulunur.

Örnek: $d \ldots (x-2y+z=0,\ 2x+y+z-3=0)$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$\vec{n}_1 = (1,-2,1)$, $\vec{n}_2 = (2,1,1)$ olup $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,1,5)$

olup $\vec{u} = (-3,1,5)$ alınabilir. Düzlem denklemlerinin arakesitine ait bir nokta bulalım: $y=0$ için $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+z=3 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ z=-3$

$\Rightarrow A(3,0,-3) \in d$, $\vec{u} = (-3,1,5)$

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{5} = \lambda$$

$$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x = 3-3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3+5\lambda \end{cases}$$ bulunur.

185

2. yol:

Düzlem denklemlerini ortak çözelim:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y+z-3=0 \end{cases}$$

$x=t$ alınırsa,

$$\begin{cases} 2y-z=t \\ y+z=3-2t \end{cases}$$

$$+ \Rightarrow 3y=3-t$$

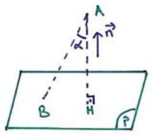
$$\Rightarrow y=1-\frac{t}{3}, \quad z=2-\frac{5t}{3}$$

$$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x=t \\ y=1-\frac{t}{3} \\ z=2-\frac{5}{3}t \end{cases}$$ bulunur.

164

186

Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı



$A(x_0,y_0,z_0)$ noktasının $P \ldots ax+by+cz+d=0$ düzlemine olan uzaklığını bulalım: Bir $B=(x_1,y_1,z_1) \in P$ alalım. $\vec{AB}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı α olsun.

$$\langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = \|\vec{AB}\| . \|\vec{n}\| . \cos\alpha$$

$$= \|\vec{AB}\| . \|\vec{n}\| . \frac{\|\vec{AH}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \|\vec{AH}\| = \ell = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$$ olur.

$\vec{AB}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$, $\vec{n}=(a,b,c)$

$$\Rightarrow \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)$$

$$= \underbrace{ax_1+by_1+cz_1}_{-d \ (B \in P)} - ax_0 - by_0 - cz_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

165

187

Örnek: $A(2,-1,3)$ noktasının $2x+y-2z+10=0$ düzlemine olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

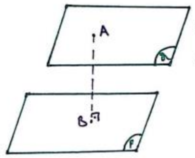
$$\ell = \frac{|2.2+(-1)-2.3+10|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{7}{3} \text{ br.}$$

166

188

Not:



Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık bulunurken düzlemlerin birinden bir nokta alınıp diğer düzleme olan uzaklığı bulunur.

$$d(P,Q) = d(A,P) = \|\vec{AB}\|$$ dır.

167

189

Örnek:

$P \ldots 2x+y-2z+10=0$

$Q \ldots 2x+y-2z+1=0$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm:

$y=z=0$ için $x=-5 \Rightarrow A(-5,0,0) \in P$

$$d(A,Q)=\frac{|-10+1|}{\sqrt{9}}=3 \text{ br.}$$

168

190

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11

191

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

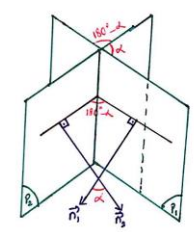
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12

192

Kesişen İki Düzlem Arasındaki Açı



Kesişen iki düzlem arasında iki açı oluşur. Bu iki açıdan biri diğerinin bütünleridir. Düzlemler arasındaki açı, düzlemlerin normalleri arasındaki açıya veya bu açının bütünlerine eşittir. Yani normaller arasındaki açı α ise düzlemler arasındaki açı α veya 180°-α dır.

169

193

Örnek: $P_1 \ldots\ 2x-y+2z+1=0$ ve $P_2 \ldots\ 2x+y+2z+15=0$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{n}_1=(2,-1,2),\ \vec{n}_2=(2,1,2)$$

P_1 ile P_2 arasındaki açı α ise $\vec{n}_1$ ile $\vec{n}_2$ arasındaki açı da α dır.

$$\Rightarrow \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \|\vec{n}_1\| . \|\vec{n}_2\| . \cos\alpha$$

$$\Rightarrow 7 = 3.3.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7}{9}\right) \text{ olur.}$$

170

194

Kesişen İki Düzlemin Açıortay Düzlemleri

Kesişen iki düzlemden eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine bu iki düzlemin açıortay düzlemi denir.

$P \ldots\ a_1x+a_2y+a_3z+d_1=0$, $Q \ldots\ b_1x+b_2y+b_3z+d_2=0$

kesişen düzlemleri verilsin. Açıortay düzlemine ait keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olmak üzere,

$$d(X,P) = d(X,Q)$$

$$\Rightarrow \frac{|a_1x+a_2y+a_3z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{|b_1x+b_2y+b_3z+d_2|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x+a_2y+a_3z+d_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \mp \frac{b_1x+b_2y+b_3z+d_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

bulunur.

171

195

Örnek: $P \ldots\ 2x-y+2z-5=0$ ve $Q \ldots\ x+2y-2z+1=0$ düzlemlerinin açıortay düzlemlerini bulunuz.

Çözüm:

Açıortay düzlemine ait keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.

$$\Rightarrow d(X,P) = d(X,Q)$$

$$\Rightarrow \frac{|2x-y+2z-5|}{\sqrt{9}} = \frac{|x+2y-2z+1|}{\sqrt{9}}$$

$$\Rightarrow 2x-y+2z-5 = \mp(x+2y-2z+1)$$

$$\Rightarrow x-3y+4z-6=0 \text{ ve } 3x+y-4=0 \text{ bulunur.}$$

172

196

Üç Düzlemin Birbirine Göre Durumu

$P_1 \ldots\ a_1x+a_2y+a_3z+d_1=0$

$P_2 \ldots\ b_1x+b_2y+b_3z+d_2=0$

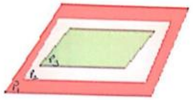
$P_3 \ldots\ c_1x+c_2y+c_3z+d_3=0$

düzlemleri verilsin. Bu düzlemlerin normalleri

$$\vec{n}_1=(a_1,a_2,a_3)$$
$$\vec{n}_2=(b_1,b_2,b_3)$$
$$\vec{n}_3=(c_1,c_2,c_3) \quad \text{dir.}$$

173

1) P_1, P_2, P_3 Çakışıktır

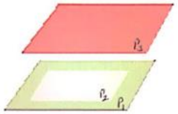


Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca,

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \frac{d_1}{d_3}}$$ dir.

2) İkisi Çakışık, Üçüncüsü Bunlara Paraleldir



P_1 ve P_2 çakışık, P_3 bunlara paralel olsun.

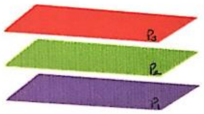
Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca,

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3}}$$ dir.

174

3) P_1, P_2, P_3 Paraleldir



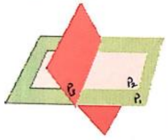
Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca;

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{d_1}{d_2}},$$

$$\boxed{\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} \neq \frac{d_2}{d_3}},$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3}}$$ dir.

4) Herhangi İkisi Çakışık, Diğeri Bunları Keser



P_1 ve P_2 çakışık olsun. P_3, bunları kessin.

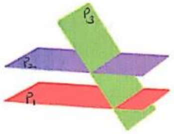
Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca;

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}},$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} \neq \frac{a_2}{c_2} \text{ veya } \frac{a_2}{c_2} \neq \frac{a_3}{c_3}}$$ dir.

175

5) Herhangi İkisi Paralel, Diğeri Bunları Keser



P_1 ile P_2 paralel olsun. P_3 bunları kessin.

Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca;

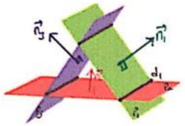
$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{d_1}{d_2}}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} \neq \frac{a_2}{c_2} \text{ veya } \frac{a_2}{c_2} \neq \frac{a_3}{c_3}}$$ dir.

Not: Düzlem denklemleri verildiğinde bu ilk 5 durum kolaylıkla tespit edilebilir.

176

6) İkişer İkişer Arakesitleri Paraleldir



Bu durumda $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$ olur.

$P_1 \cap P_2 = \{d_1\}$ ve d_1 in doğrultmanı $\vec{u}$ olsun.

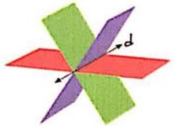
$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_1 \perp P_1 &\Rightarrow \vec{n}_1 \perp d \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_2 \perp P_2 &\Rightarrow \vec{n}_2 \perp d \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{u}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \text{ dir.}$$

$\vec{u}_1 \perp \vec{n}_3$ olduğundan $\langle \vec{u}_1, \vec{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \boxed{\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0}$

Ayrıca $\boxed{A \in P_1 \cap P_2 \text{ için } A \notin P_3}$ olur.

7) Üçü Bir Doğru Boyunca Kesişir



$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{d\}$ ve d nin doğrultmanı $\vec{u}$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_1 \perp P_1 &\Rightarrow \vec{n}_1 \perp d \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u} \\ \vec{n}_2 \perp P_2 &\Rightarrow \vec{n}_2 \perp d \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \text{ dir.}$$

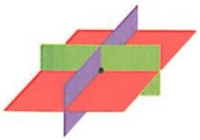
$\vec{n}_3 \perp P_3 \Rightarrow \vec{n}_3 \perp d \Rightarrow \vec{n}_3 \perp \vec{u} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{n}_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0}$

Ayrıca $\boxed{A \in P_1 \cap P_2 \text{ için } A \in P_3}$ olur.

177

8) Üçü Bir Noktada Kesişir



Bu durumda,

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z+d_1=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z+d_2=0 \\ c_1x+c_2y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$$

sisteminin tek çözümü vardır. Sistem Cramer sistemi olup katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\det(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3})\neq 0} \text{ olur.}$$

Örnek:

$P_1 \ldots \; x-y+2z-1=0$

$P_2 \ldots \; x-y-2z-1=0$

$P_3 \ldots \; x-y+2z+1=0$

düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

P_1 ve P_3 paraleldir. P_2 bunları keser.

Örnek:

$P_1 \ldots \; x+3y-z-1=0$

$P_2 \ldots \; 2x+6y-2z+2=0$

$P_3 \ldots \; x+3y-z+1=0$

düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

P_2 ve P_3 çakışık, P_1 bunlara paraleldir.

Örnek:
$$\begin{cases} P_1 \ldots \; 2x-y+z+1=0 \\ P_2 \ldots \; 3x+5y-z+4=0 \\ P_3 \ldots \; x+6y-2z+1=0 \end{cases}$$
düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm: ilk 5 durumun olmadığı açıktır. Diğer durumları inceleyelim:

$$\det(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3})=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2.(-4)+1.(-5)+1.13=0$$

O halde ya ikişer ikişer arakesitleri paraleldir ya da üçü bir doğru boyunca kesişir.

$A\in P_1\cap P_2$ alalım. $x=0$ için $y=-\frac{5}{4}$, $z=-9/4 \Rightarrow A(0,-\frac{5}{4},-\frac{9}{4})$

$A\overset{?}{\in}P_3$. $\quad 0+6(-\frac{5}{4})-2(-\frac{9}{4})+1=-2\neq 0$

$\Rightarrow A\notin P_3$ olup ikişer ikişer arakesitleri paraleldir.

Örnek:

$P_1 \ldots \; 2x-y+z+1=0$

$P_2 \ldots \; x+6y-2z+1=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu

$P_3 \ldots \; x+19y-7z+2=0$ inceleyiniz.

Çözüm: ilk 5 durumun olmadığı açıktır. Diğer durumları inceleyelim:

$$\det(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3})=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 19 & -7 \end{vmatrix} = 2.(-4)+1.(-5)+1.13=0$$

O halde ya ikişer ikişer arakesitleri paraleldir ya da üçü bir doğru boyunca kesişir.

$A\in P_1\cap P_2$ alalım. $y=0$ için $A(-\frac{3}{5},0,\frac{1}{5})$ olur.

$A\overset{?}{\in}P_3$. $\quad -\frac{3}{5}-\frac{7}{5}+2=-2+2=0$

$\Rightarrow A\in P_3$ olup üçü bir doğru boyunca kesişir.

Örnek: $P_1 \ldots\ x-2y+z-14=0$
$P_2 \ldots\ 3x-5y+3z-40=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu
$P_3 \ldots\ x+y+2z-11=0$ inceleyiniz.

Çözüm:

İlk 5 durumun olmadığı açıktır. Diğer durumları inceleyelim:

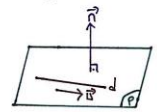
$$\det(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-13)+2.3+1.8 = 1 \neq 0$$

O halde üçü bir noktada kesişir.

Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumu

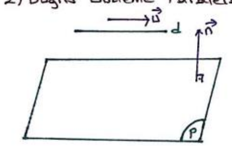
Doğrultmanı $\vec{u}$ olan bir d doğrusu ve normali $\vec{n}$ olan bir P düzlemi verilsin. d ve P için şu durum sözkonusudur:

1) Doğru Düzlemin İçindedir ($d \subset P$)



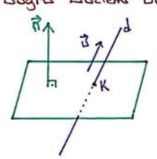
Bu durumda $\vec{n} \perp \vec{u}$ olur. Ayrıca, $A \in d$ için $A \in P$ dir.

2) Doğru Düzleme Paraleldir ($d \parallel P$)



Bu durumda $\vec{n} \perp \vec{u}$ olur. Ayrıca, $A \in d$ için $A \notin P$ dir.

3) Doğru Düzlemi Bir Noktada Keser ($d \cap P = \{K\}$)



Bu durumda $\vec{u} \not\perp \vec{n}$ dir.

Örnek:

$d \ldots \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3-2t \end{cases}$ doğrusu ile $P \ldots\ x+y-z+3=0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u} = (1,-1,-2)$, $\vec{n} = (1,1,-1)$ olup $\langle \vec{u},\vec{n} \rangle = 2 \neq 0$ dır.

O halde doğru düzlemi bir noktada keser.

Örnek: $d \ldots\ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{9} = k$ doğrusu ile $P \ldots\ 3x+3y-z-1=0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u} = (3,0,9)$, $\vec{n} = (3,3,-1)$ olup $\langle \vec{u},\vec{n} \rangle = 0$ olduğundan doğru düzlemin içindedir ya da düzleme paraleldir.

$k=0$ için $A(1,-2,-1) \in d$ alalım. $A \overset{?}{\in} P$

$3.1+3.(-2)+1-1 = -3 \neq 0$

$\Rightarrow A \notin P$ olup doğru düzleme paraleldir.

209

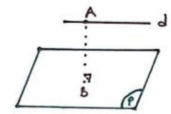
Örnek: d... $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{20}=t$ doğrusu ile P... $10x-20y+4z-70=0$

düzleminin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

186

210

Not: Doğru düzleme paralel ise aralarındaki uzaklığı bulmak için doğru üzerinden bir nokta alınıp bu noktanın düzleme olan uzaklığı bulunur.



Örnek: d... $\frac{x+1}{15}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-6}=\lambda$ doğrusunun P... $3y+z+21=0$

düzlemine olan uzaklığını bulunuz. $\left(\frac{21}{\sqrt{10}}\right)$

187

211

Not: Doğru düzlemi bir noktada kesiyorsa arakesit noktası şu şekilde bulunur:

$d \cap P = \{K\}$, $K=(x_0,y_0,z_0)$ olsun.

$K \in d$ ve $K \in P$ olmasından hareketle x_0, y_0 ve z_0 bulunur.

188

212

Örnek: d... $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z}{1}=\lambda$ doğrusu ile P... $2x+y-z-2=0$

düzleminin arakesit noktasını bulunuz.

Çözüm:

$d \cap P = \{K\}$ ve $K=(x_0,y_0,z_0)$ olsun.

$K \in d$ olduğundan $x_0=3\lambda+2,\ y_0=4\lambda-5,\ z_0=\lambda$ olur.

$K \in P$ olduğundan $2x_0+y_0-z_0-2=0$

$\Rightarrow 6\lambda+4+4\lambda-5-\lambda-2=0$

$\Rightarrow 9\lambda=3 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$

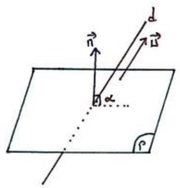
$\Rightarrow x_0=3\lambda+2=3,\ y_0=4\lambda-5=-\frac{11}{3},\ z_0=\lambda=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow K\left(3,-\frac{11}{3},\frac{1}{3}\right)$ bulunur.

189

213

Doğru Düzlemi Kesiyorsa Aralarındaki Açının Bulunması



d ile P arasındaki açı α ise

$\vec{n}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dır.

190

214

Örnek: $d \ldots \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases}$ doğrusu ile $P \ldots\; 2x+y+z-5=0$ düzlemi arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{n}=(2,1,1)$ olup P ile d arasındaki açı α olsun. O halde $\vec{u}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dır.

$$\Rightarrow \langle \vec{u},\vec{n}\rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{11}\,\sqrt{6}\,\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{66}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) \text{ bulunur.}$$

191

215

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 12

216

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

217

Karışık Problemler

Örnek: $A(5,5,6)$ noktasından geçen ve $d \dots 3x = y = z = \lambda$ doğrusunu dik olarak kesen doğrunun denklemini bulunuz.

218

Örnek: $A(1,2,3)$ noktası ve $d \dots x = y = z = \lambda$ doğrusunun belirttiği düzlemin denklemini bulunuz.

219

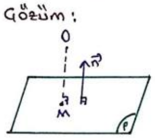
Örnek: $A(1,0,1)$ noktasından geçen, $d_1 \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = k$

ve $d_2 \dots \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3} = \lambda$ doğrularını kesen doğruyu bulunuz.

220

Örnek: $P \dots x+y+z-3=0$ düzlemi üzerinde bir nokta $M(x,y,z)$ olsun. M nin koordinatları ne olmalıdır ki orijinin bu noktaya olan uzaklığı minimum olsun?

Çözüm:



M nin O ya olan uzaklığının minimum olması için $\vec{OM} \parallel \vec{n}$ olmalıdır.

$\vec{n} = (1,1,1)$ olup $\vec{OM} = \lambda \vec{n}$ den

$(x,y,z) = \lambda(1,1,1)$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \lambda$$

$$\Rightarrow x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda \text{ bulunur.}$$

$M \in P$ olduğundan $x+y+z=3 \Rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow M(1,1,1)$ olmalıdır.

221

Örnek: $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$, $C(2,1,2)$ noktalarından aynı uzaklıkta ve $P \ldots x+3y+z=0$ düzlemine ait $K(x,y,z)$ noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$d(A,K)=d(B,K) \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = x^2+(y-2)^2+(z-1)^2$$

$$\Rightarrow x-y+1=0 \ldots (1)$$

$$d(A,K)=d(C,K) \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$$

$$\Rightarrow x+z-3=0 \ldots (2)$$

$K \in P$ olduğundan $x+3y+z=0 \ldots (3)$

(1), (2) ve (3) den

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z-3=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu sistem çözülürse $K(-2,-1,5)$ bulunur.

196

222

Örnek: Aşağıda verilen doğrudaş olmayan noktalardan geçen düzlemlerin denklemlerini bulunuz.

a) $A(1,2,3)$, $B(1,-1,2)$, $C(-2,2,1)$

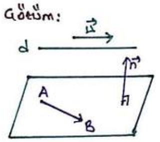
b) $A(0,0,0)$, $B(a,b,c)$, $C(a-b,\, b-c,\, c-a)$

197

223

Örnek: $d \ldots x-1 = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3} = \lambda$ doğrusuna paralel olan ve $A(-3,1,1)$, $B(-1,3,1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:



$\vec{AB} \perp \vec{n}$, $\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{u}$ alınabilir.

$\vec{u} = (1,2,-3)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6,6,2)$$

$$\Rightarrow P \ldots -6x+6y+2z+d=0$$

$A \in P$ olduğundan $18+6+2+d=0 \Rightarrow d=-26$

$$\Rightarrow P \ldots 6x-6y-2z+26=0$$

$$\Rightarrow P \ldots 3x-3y-z+13=0 \text{ bulunur.}$$

198

224

Örnek: $d_1 \ldots x=y=z=\lambda$ ve $d_2 \ldots x-1 = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3} = t$ doğrularına paralel olan ve $A(-2,3,4)$ noktasından geçen P düzlemini bulunuz.

Çözüm:

d_1 in doğrultmanı $\vec{u_1}=(1,1,1)$, d_2 nin doğrultmanı $\vec{u_2}=(1,2,-3)$ dir.

P nin normali $\vec{n}$ olmak üzere $d_1 \parallel P$ olduğundan $\vec{u_1} \perp \vec{n}$ ve $d_2 \parallel P$ olduğundan $\vec{u_2} \perp \vec{n}$ dir.

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ alınabilir.

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5,4,1)$$

$$\Rightarrow P \ldots -5x+4y+z+d=0$$

$A \in P \Rightarrow 10+12+4+d=0 \Rightarrow d=-26$

$\Rightarrow P \ldots 5x-4y-z+26=0$ olur.

199

Örnek: $d_1 \ldots \frac{x}{2} = y = z-1 = \lambda$ ve $d_2 \ldots x = \frac{y}{2} = z-1 = t$

doğruların birbirlerine göre durumunu inceleyiniz. Eğer bir düzlem belirtiyorlarsa denklemini bulunuz.

Örnek: $A(-1,2,-3)$ noktasından geçen ve $P \ldots 2x-2y-4z-1=0$ ile $Q \ldots 3x+y+6z-4=0$ düzlemlerinin her ikisine birden dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Aradığımız düzlem R ve normali de $\vec{n}_R$ olsun.

P nin normali: $\vec{n}_P = (2,-2,-4)$, Q nun normali: $\vec{n}_Q = (3,1,6)$ dır.

$R \perp P \Rightarrow \vec{n}_R \perp n_P$, $R \perp Q \Rightarrow \vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ olur.

$\Rightarrow \vec{n}_R = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q$ alınabilir.

$$\Rightarrow \vec{n}_R = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-8,-24,8)$$

$\Rightarrow \vec{n}_R = (1,3,-1)$ alınabilir.

$\Rightarrow P \ldots x+3y-z+d=0$

$A \in P \Rightarrow -1+6+3+d=0 \Rightarrow d=-8$

$\Rightarrow P \ldots x+3y-z-8=0$ olur.

Örnek: $A(7,9,-5)$ noktasından geçen ve koordinat eksenlerini eşit parçalara ayıran P düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm:

P nin koordinat eksenlerinden ayırdığı parçaların uzunluğu r br olsun. O halde $A(r,0,0), B(0,r,0), C(0,0,r) \in P$ dir.

$P \ldots ax+by+cz+d=0$

$A \in P \Rightarrow ar+d=0 \Rightarrow a=-d/r$

$B \in P \Rightarrow br+d=0 \Rightarrow b=-d/r$

$C \in P \Rightarrow cr+d=0 \Rightarrow c=-d/r$

$\Rightarrow P \ldots \left(-\frac{d}{r}\right)x + \left(-\frac{d}{r}\right)y + \left(-\frac{d}{r}\right)z + d = 0$

$\Rightarrow P \ldots x+y+z+r=0$

$A \in P \Rightarrow 7+9-5+r=0 \Rightarrow r=-11$

$\Rightarrow P \ldots x+y+z-11=0$

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14

Örnek:
P... $x+2y+2z-4=0$
Q... $x+4y+6z-10=0$ düzlemlerinin birbirine göre
R... $2x+4y+4z-8=0$ durumunu inceleyiniz.
(P ve R çakışık, Q bunları keser)

Örnek:
P... $x+2y+2z-4=0$
Q... $2x+4y+4z-8=0$ düzlemlerinin birbirine göre
R... $3x+6y+6z-10=0$ durumunu inceleyiniz.
(P ve Q çakışık, R bunlara paralel)

Örnek:
P... $x+2y+2z-4=0$
Q... $2x+4y+4z-7=0$ düzlemlerinin birbirine göre
R... $3x+6y+3z-5=0$ durumunu inceleyiniz.
(P ve Q paralel, R bunları keser)

Örnek:
P... $2x+2y+2z-4=0$
Q... $x+4y+6z-10=0$ düzlemlerinin bir noktada
R... $x+3y+4z-7=0$ kesiştiğini gösteriniz. Arakesit noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$\det(\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

O halde düzlemler bir noktada kesişir. Arakesit noktası $K(x_0,y_0,z_0)$ olsun.

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 0 \quad , \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \quad \Rightarrow K(0,1,1)$$

Örnek:
P... $y+z=1$
Q... $2x+y+2z=m$ düzlemlerinin bir doğru boyunca
R... $2x+z=1$ kesişmesi için m ne olmalıdır?

Çözüm:
P ve R nin arakesitine ait bir K noktası için $K \in Q$ olmalıdır.
$x=0$ için $z=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow K(0,0,1) \in P \cap R$
$K \in Q \Rightarrow m=2$ olur.

233

Örnek: P... $kx+ky+z=-1$
Q... $kx-z=1$ düzlemlerinin bir doğru boyunca
R... $x+ky+z=2$ kesişmesi için k ne olmalıdır?

Çözüm:

$$\det(\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)=\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ k & 0 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ olmalıdır.}$$

$\Rightarrow k(1-k)=0 \Rightarrow k=0$ veya $k=1$ olmalıdır.

!! $k=1$ olamayacağını görünüz

206

234

Örnek: $(2x-y+4z-5=0,\ x+y-z+1=0)$ doğrusu ile orijinin belirttiği düzlemin denklemini yazınız.

207

235

Örnek: P_1... $2x+y+kz-2=0$
P_2... $kx+3y+2z-4=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu
P_3... $x+5z-1=0$ k nın alacağı değerlere göre inceleyiniz.

Çözüm:

İlk 5 durumdan birinin olmadığı açıktır. Şimdi diğer durumları inceleyelim:

$$\det(\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=2.15-1.(5k-2)+k.(-3)=-8k+32$$

O halde $-8k+32=0$ yani $k=4$ ise düzlemler bir doğru boyunca kesişir ya da ikişer ikişer arakesitleri paraleldir. $k\neq 4$ ise üçü bir noktada kesişir. Şimdi $k=4$ durumunu inceleyelim:

208

236

$k=4$ için

P_1... $2x+y+4z-2=0$
P_2... $4x+3y+2z-4=0$
P_3... $x+5z-1=0$ olur.

$A\in P_1\cap P_2$ olalım. $z=0$ için $\begin{matrix} 2x+y-2=0 \\ 4x+3y-4=0 \end{matrix} \Rightarrow y=0,\ x=1$ olur.

$\Rightarrow A(1,0,0)\in P_1\cap P_2$ dir. $A\overset{?}{\in} P_3$

$1-1=0 \Rightarrow A\in P_3$

$\Rightarrow k=4$ için üçü bir doğru boyunca kesişir.

Sonuç:

- $k=4$ ise düzlemlerin üçü bir doğru boyunca kesişir.
- $k\neq 4$ ise düzlemlerin üçü bir noktada kesişir.

209

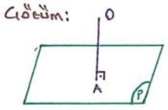
237

Örnek: $A(11,-1,0)$ ve $B(-11,9,0)$ noktalarından geçen doğrunun $9x+y-49=0$ düzlemini kestiği noktayı bulunuz.

238

Örnek: Orijinden P düzlemine inilen dikmenin ayağı $A(5,-3,1)$ dir. Bu P düzlemini bulunuz.

Çözüm:



$\vec{OA}=\vec{n}$ alınabilir.

$\Rightarrow \vec{n}=(5,-3,1)$, $A(5,-3,1)$

$\Rightarrow P\ldots\ 5x-3y+z+d=0$

$A\in P \Rightarrow 25+9+1+d=0$

$\Rightarrow d=-35$

$\Rightarrow P\ldots\ 5x-3y+z-35=0$ bulunur.

239

Örnek: $A(-8,2,5)$ ve $B(2,10,3)$ için AB doğru parçasının orta dikme düzlemini bulunuz.

Çözüm:

AB doğru parçasının orta dikme düzlemi, AB nin orta noktasından geçen ve AB ye dik olan düzlemdir. Bu düzleme P diyelim.

AB nin orta noktası $C\left(\frac{-8+2}{2}, \frac{2+10}{2}, \frac{5+3}{2}\right)=(-3,6,4)$

$\vec{AB}=(10,8,-2)=\vec{n}$

$\Rightarrow P\ldots\ 10x+8y-2z+d=0$

$C\in P \Rightarrow -30+8.6-2.4+d=0 \Rightarrow d=-10$

$\Rightarrow P\ldots\ 5x+4y-z+5=0$ bulunur.

240

Örnek: $A(3,1,-5)$, $B(0,4,7)$ den geçen ve $\alpha=(2,1,5)$ vektörüne paralel olan düzlemin denklemini yazınız.

Yol gösterme: $\vec{AB}\wedge\alpha=\vec{n}$ alınabilir

241

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14

242

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

243

Özel Düzlemler

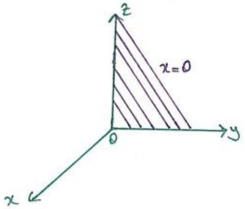
$P \ldots ax+by+cz+d=0$ düzlemi verilsin. P nin normali $\vec{n}=(a,b,c)$ dir.

1) $a\neq 0$, $b=c=d=0$ olsun.

Bu durumda düzlemin denklemi

$$P \ldots x=0 \quad \text{şeklindedir.}$$

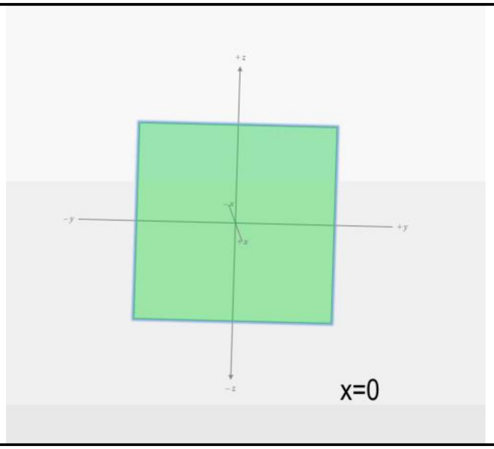
$\vec{n}=(1,0,0)$ olup düzlem orijinden geçer.



Bu düzleme yoz düzlemi de denir.

214

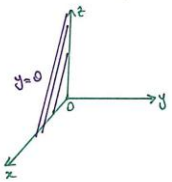
244



245

2) $b \neq 0$ ve $a=c=d=0$ olsun.

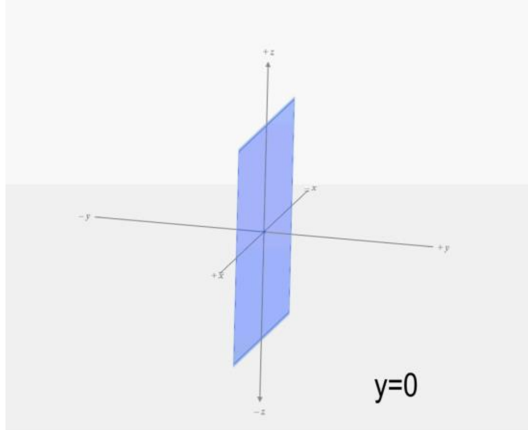
Bu durumda $P \ldots y=0$ dır.



Bu düzleme xoz düzlemi de denir.

216

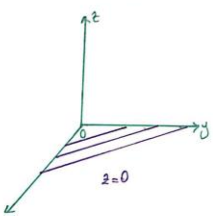
246



247

3) $c \neq 0$, $a=b=d=0$ olsun.

Bu durumda $P \ldots z=0$ dır.

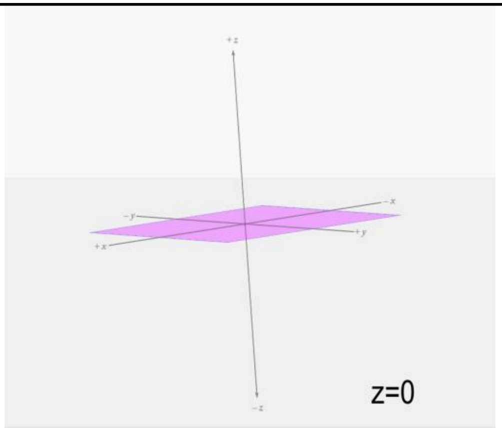


Bu düzleme xoy düzlemi de denir.

Not: Yukarıdaki üç düzleme koordinat düzlemleri adı verilir.

218

248



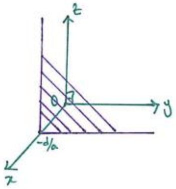
249

4) $a \neq 0$, $d \neq 0$ ve $b = c = 0$ olsun.

Bu durumda,

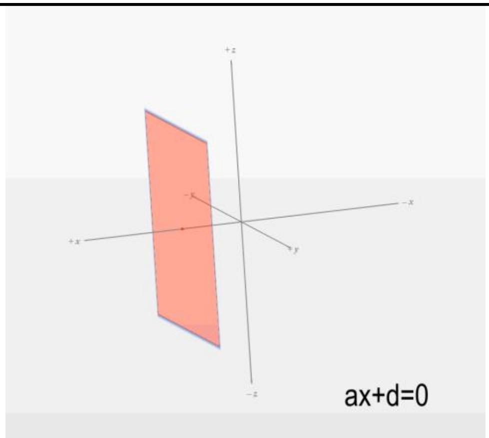
$$P \dots \; ax + d = 0 \quad \text{dır.}$$

$\vec{n} = (a, 0, 0)$ olup $\vec{n} \parallel \vec{e_1}$ dir. Düzlem yOz düzlemine paralel olup orijinden geçmez. $A(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ noktasından geçen ve normali $\vec{e_1}$ olan düzlemdir.



220

250

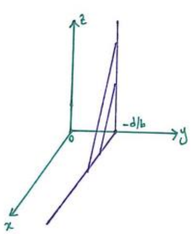


251

5) $b \neq 0$, $d \neq 0$ ve $a = c = 0$ olsun.

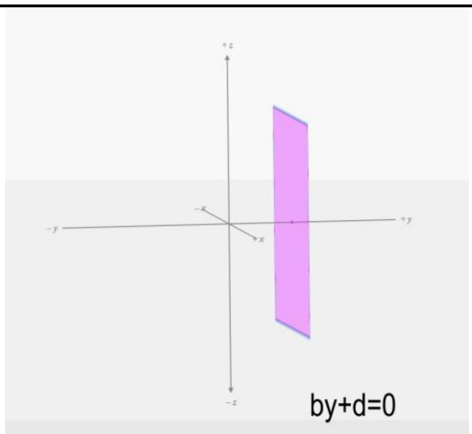
$$P \dots \; by + d = 0$$

olup $A(0, -d/b, 0)$ dan geçen ve normali $\vec{e_2}$ olan düzlemdir.



221

252

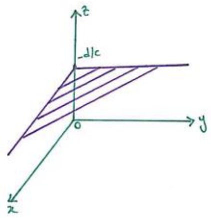


253

6) $c \neq 0$, $d \neq 0$ ve $a=b=0$ olsun.

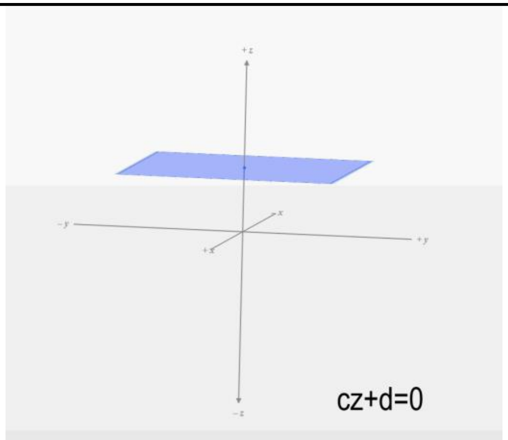
$P \ldots \; cz+d=0$

olup $A(0,0,-d/c)$ den geçen ve normali $\vec{e_3}$ olan düzlemdir.



224

254



255

7) $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $c=d=0$ olsun.

Bu durumda $P \ldots \; ax+by=0$ dır. $\vec{n}=(a,b,0)$ olup $\vec{n} \perp \vec{e_3}$ olur. O halde z ekseni ya düzlemin içinde ya da z ekseni düzleme paraleldir. z eksenine ait bir nokta $A(0,0,1)$ olmak üzere $A \in P$ olup z ekseni düzlemin içindedir. Şimdi düzlemin koordinat düzlemleri ile arakesit doğrularını bulalım.

a) xoz ile arakesit : z eksenidir.

b) yoz ile arakesit : z eksenidir.

c) xoy ile arakesit :

$$d \ldots \begin{cases} ax+by=0 \\ z=0 \end{cases}$$

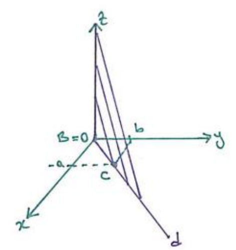
$$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{a}{b}t \\ z=0 \end{cases}$$ arakesit doğrusudur.

226

256

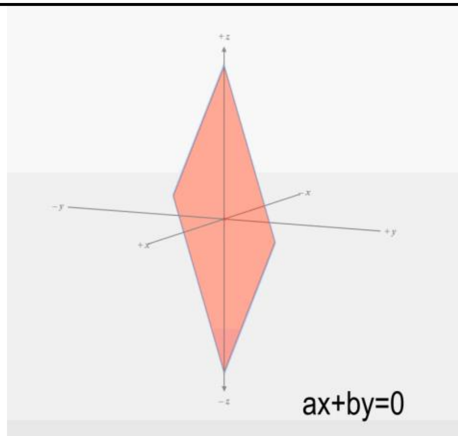
$t=0$ için $B(0,0,0) \in d$

$t=b$ için $C(b,-a,0) \in d$ olur.



227

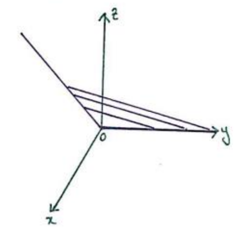
257



258

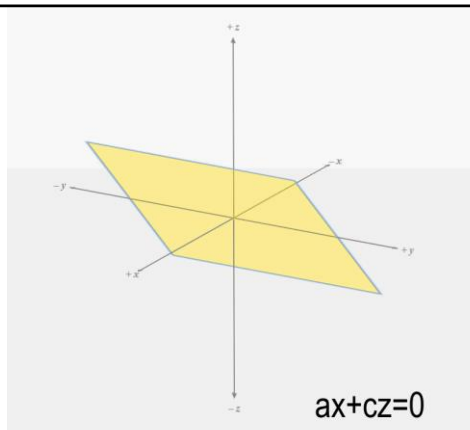
8) $a \neq 0$, $c \neq 0$ ve $b = d = 0$ olsun.

P... $ax + cz = 0$ dır.



229

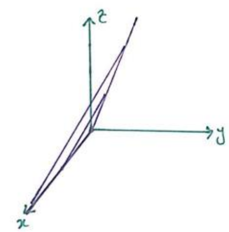
259



260

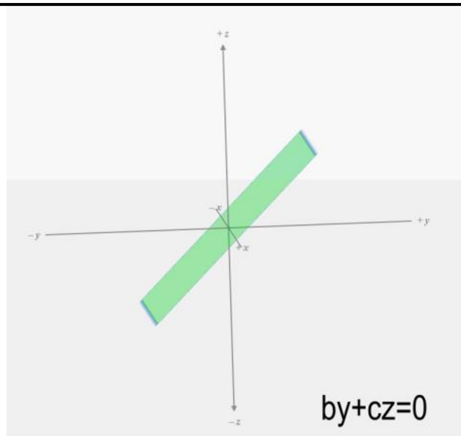
9) $b \neq 0$, $c \neq 0$ ve $a = d = 0$ olsun.

P... $by + cz = 0$ olur.



231

261



262

10) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ ve $c = 0$ olsun.

Bu durumda $P \ldots ax + by + d = 0$ olur. $\vec{n} = (a, b, 0)$ olup $\vec{n} \perp \vec{e_3}$ dir. O halde z ekseni ya düzlemin içindedir ya da düzleme paraleldir. z eksenine ait bir nokta $A(0,0,1)$ olmak üzere $A \notin P$ olur. O halde z ekseni düzleme paraleldir. Düzlemin koordinat düzlemleriyle arakesit doğrularını bulalım:

a) xOz ile arakesit:

$$d_1 \ldots \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 \ldots \begin{cases} x = -d/a \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ olur.}$$

$t = 0$ için $B(-d/a, 0, 0) \in d_1$

$t = 1$ için $C(-d/a, 0, 1) \in d_1$ dir.

263

b) yOz ile arakesit:

$$d_2 \ldots \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_2 \ldots \begin{cases} x = 0 \\ y = -d/b \\ z = \lambda \end{cases} \text{ olur.}$$

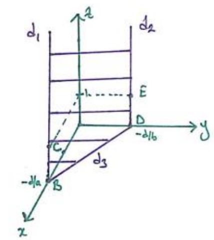
$\lambda = 0$ için $D(0, -d/b, 0) \in d_2$ ve $\lambda = 1$ için $E(0, -d/b, 1) \in d_2$ dir.

c) xOy ile arakesit:

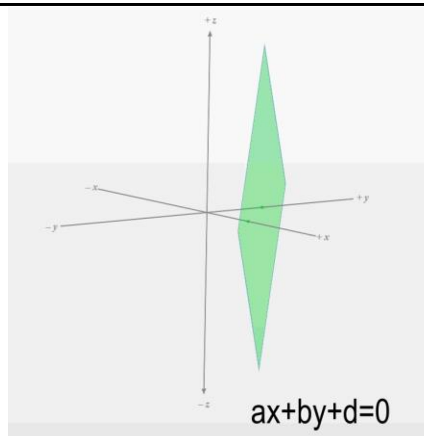
$$d_3 \ldots \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow d_3 \ldots \begin{cases} x = k \\ y = -\frac{a}{b}k - \frac{d}{b} \\ z = 0 \end{cases}$$

$k = 0$ için $D \in d_3$ ve $k = -\frac{d}{a}$ için $B \in d_3$ olur

264



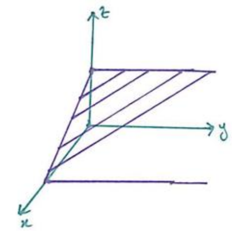
265



266

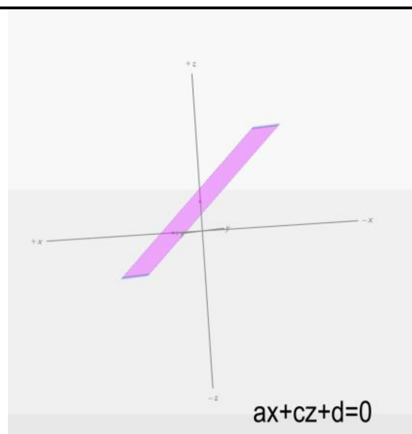
11) $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ ve $b = 0$ olsun.

P... $ax + cz + d = 0$ olur.



237

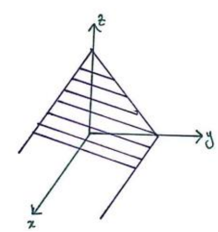
267



268

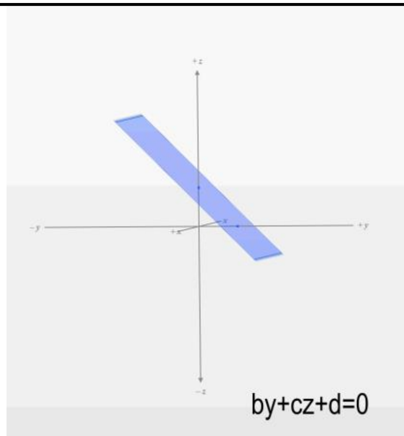
12) $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ ve $a = 0$ olsun.

P... $by + cz + d = 0$ olur.



239

269



270

13) $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ ve $d=0$ olsun.

$P \ldots ax+by+cz=0$ olur.

Düzlem orijinden geçer. Koordinat düzlemleri ile arakesit doğrularını bulalım:

a) xoz ile arakesit

$$d_1 \ldots \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 \ldots \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-\frac{a}{c}t \end{cases}$$

$t=0$ için $O(0,0,0) \in d_1$ ve $t=c$ için $A(c,0,-a) \in d_1$ dir.

241

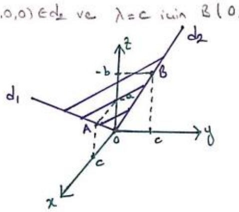
271

b) yoz ile arakesit:

$$d_2 \ldots \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ x=0 \end{cases}$$

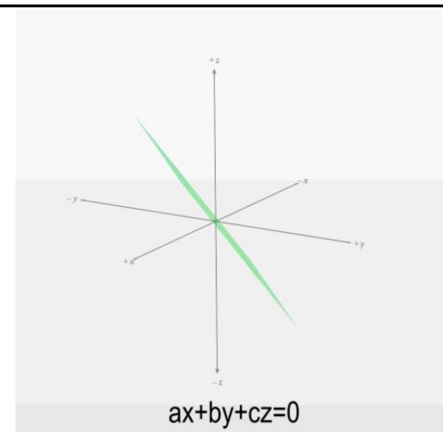
$$d_2 \ldots \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=-\frac{b}{c}\lambda \end{cases}$$

$\lambda=0$ için $O(0,0,0) \in d_2$ ve $\lambda=c$ için $B(0,c,-b) \in d_2$ dir.



242

272



273

14) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ olsun.

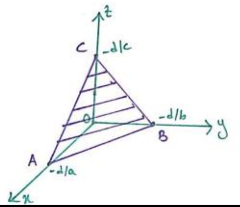
$P \ldots ax+by+cz+d=0$ olur.

$y=z=0$ için $A(-d/a, 0, 0) \in P$

$x=y=0$ için $B(0, 0, -d/c) \in P$

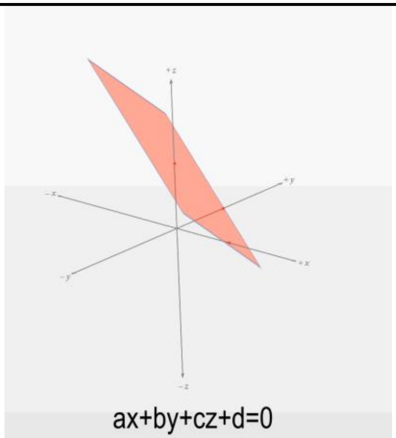
$x=z=0$ için $C(0, -d/b, 0) \in P$ dir.

A, B ve C doğrudaş olmayan üç nokta olup bu üç noktadan geçen düzlem P düzlemidir.



244

274



275

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

276

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

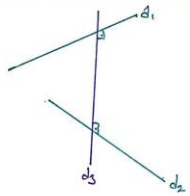
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

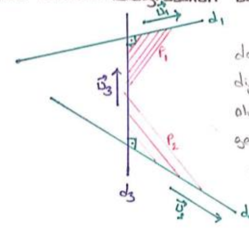
Ders 16

AYKIRI İKİ DOĞRUNUN ORTAK DİKMESİ VE AYKIRI İKİ DOĞRU ARASINDAKİ UZAKLIK



d_1 ve d_2 aykırı doğrularının her ikisini de dik olarak kesen d_3 doğrusuna d_1 ve d_2 nin ortak dikme doğrusu denir. d_3 ün d_1 ve d_2 yi kestiği noktalar arasındaki uzaklığa da d_1 ve d_2 aykırı doğruları arasındaki uzaklık adı verilir.

Ortak Dikme Doğrusunun Bulunması



$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ olur. d_1 ve d_3 doğrularının belirttiği düzleme P_1 diyelim. P_1 in normali $\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3$ olur. $A \in d_1$ için $A \in P_1$ olup A noktasından geçen ve normali $\vec{n}_1$ olan düzlem denklemi P_1 in denklemidir.

d_2 ve d_3 doğrularının belirttiği düzleme P_2 diyelim. P_2 nin normali $\vec{n}_2 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$ olur. $B \in d_2$ için $B \in P_2$ olup B noktasından geçen ve normali $\vec{n}_2$ olan düzlem denklemi P_2 nin denklemidir.

$$\Rightarrow d_3 \dots (P_1 = 0,\ P_2 = 0) \text{ olur.}$$

$d_1 \cap d_3 = \{C\}$ ve $d_2 \cap d_3 = \{D\}$ olmak üzere d_1 ile d_2 arasındaki uzaklık $l = \|\vec{CB}\|$ olur.

Örnek: $d_1 \dots \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1} = \lambda$

ve

$d_2 \dots \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-4}{-2} = t$ doğrularının aykırı olduğunu gösteriniz. Ortak dikme doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (2,2,-1)$, $\vec{u}_2 = (2,3,-2)$ dir. Ortak dikme doğrusu d_3 ve doğrultmanı da $\vec{u}_3$ olsun. O halde $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-1,2,2)$ dir. d_1 ile d_3 ün belirttiği düzlem P_1 ve normali de $\vec{n}_1$ olmak üzere $\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 = (6,-3,6)$ dir. Ayrıca $\lambda = 0$ için $A(1,-2,3) \in P_1$ olur.

$$\Rightarrow P_1 \dots 6x - 3y + 6z + d = 0$$

$$A \in P_1 \Rightarrow 6 + 6 + 18 + d = 0 \Rightarrow d = -30$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 \dots 2x - y + 2z - 15 = 0}$$

d_2 ile d_3 ün belirttiği düzlem P_2 ve normali de $\vec{n}_2$ olmak üzere $\vec{n}_2 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = (10,-2,7)$ dir. Ayrıca, $t = 0$ için $B(-2,3,4) \in P_2$ olur.

$$\Rightarrow P_2 \dots 10x - 2y + 7z + d = 0$$

$$B \in P_2 \Rightarrow -20 - 6 + 28 + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 \dots 10x - 2y + 7z - 2 = 0}$$

$$\Rightarrow d_3 \dots (P_1 = 0,\ P_2 = 0)$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 15 = 0 \\ 10x - 2y + 7z - 2 = 0 \end{cases}$$

$z = 0$ için $x = -3$, $y = -16$ bulunur. O halde $C(-3,-16,0) \in d_3$

$\vec{u}_3 = (-1,2,2)$ olduğundan

$$d_3 \dots \frac{x+3}{-1} = \frac{y+16}{2} = \frac{z-0}{2} \text{ bulunur}$$

Bir Düzlemin Koordinat Eksenleriyle Yaptığı Açılar Cinsinden Denklemi

P... $ax+by+cz+d=0$ düzlemi verilsin. Düzlemin normali, $\vec{n}=(a,b,c)$ dir. P nin x, y ve z eksenleriyle yaptığı açılar sırasıyla α, β ve γ olsun. O halde,

$\vec{n}$ ile $\vec{e_1}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\vec{n}$ ile $\vec{e_2}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\beta$

$\vec{n}$ ile $\vec{e_3}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\gamma$ olur.

$$\Rightarrow \langle \vec{n}, \vec{e_1} \rangle = \|\vec{n}\| . \|\vec{e_1}\| . \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \Rightarrow a=\sqrt{a^2+b^2+c^2} . \sin\alpha$$

$$\langle \vec{n}, \vec{e_2} \rangle = \|\vec{n}\| . \|\vec{e_2}\| . \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \Rightarrow b=\sqrt{a^2+b^2+c^2} . \sin\beta$$

$$\langle \vec{n}, \vec{e_3} \rangle = \|\vec{n}\| . \|\vec{e_3}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2+c^2} . \sin\gamma$$

O halde $\boxed{\vec{n}=(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)}$ alınabilir.

Ayrıca $\boxed{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1}$ olup

$$\boxed{P \ldots (\sin\alpha)x+(\sin\beta)y+(\sin\gamma)z+d'=0}$$

elde edilir.

Düzlemin Eksenlerden Ayırdığı Parçalar Cinsinden Denklemi

P... $ax+by+cz+d=0$ düzlemi verilsin. P nin x, y ve z eksenlerini kestiği noktalar sırası ile A, B ve C olsun.

$$\Rightarrow A(\underbrace{-\tfrac{d}{a}}_{a_1},0,0),\ B(0,\underbrace{-\tfrac{d}{b}}_{b_1},0),\ C(0,0,\underbrace{-\tfrac{d}{c}}_{c_1}) \text{ olur.}$$

$$P \ldots \frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\frac{c}{d}z+1=0$$

$$\Rightarrow P \ldots \frac{x}{-d/a}+\frac{y}{-d/b}+\frac{z}{-d/c}=1$$

$$\Rightarrow P \ldots \boxed{\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Koordinat eksenlerini $A(3,0,0)$, $B(0,-4,0)$, $C(0,0,1)$ noktalarında kesen düzlemin denklemini bulunuz.

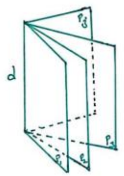
Çözüm:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{1}=1$$

$$\Rightarrow 4x-3y+12z-12=0 \text{ olur.}$$

285

Bir Doğrudan Geçen Düzlemler (Düzlem Demeti)



Bir d doğrusundan sonsuz sayıda düzlem geçer. Bu düzlemlerin kümesine **düzlem demeti**, doğruya da **düzlem demetinin ekseni** denir.

254

286

d doğrusundan geçen iki düzlem,

$P_1 \ldots a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ve $P_2 \ldots a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

olmak üzere d doğrusundan geçen tüm düzlemlerin (düzlem demetinin) denklemi,

$$\boxed{\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1 \neq 0$ için $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\lambda$ alınırsa

$$\boxed{a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

bulunur. Bu son denklem de d den geçen tüm düzlemleri (P_2 hariç) verir.

255

287

Örnek:

$P_1 \ldots 2x-3y+5z+10=0$

$P_2 \ldots 4x-y-z-5=0$

düzlemlerinin arakesit doğrusundan ve $O(0,0,0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

P_1 ve P_2 nin arakesit doğrusundan geçen tüm düzlemlerin denklemi

$$2x-3y+5z+10+\lambda(4x-y-z-5)=0$$

şeklindedir. Bu düzlemlerin içerisinden $O(0,0,0)$ noktasından geçeni arıyoruz.

$\Rightarrow 10-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

$\Rightarrow 10x-5y+3z=0$ bulunur.

256

288

Örnek:

d... $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}=\lambda$ doğrusu ve $A(2,0,5)$

noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

Çözüm:

d doğrusunu iki düzlemin arakesit doğrusu olarak yazalım: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}$ ve $\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$

$\Rightarrow P_1 \ldots x-3y-2=0$ ve $P_2 \ldots 4y-z-1=0$

olmak üzere d... $(P_1=0, P_2=0)$ dır. d den geçen tüm düzlemler $x-3y-2+\lambda(4y-z-1)=0$ dır. A noktası için $\lambda=0$ bulunur. O halde aranan düzlem,

$x-3y-2=0$ dır.

257

289

Örnek:

$d \ldots (2x+y-5=0,\ x+z-6=0)$ doğrusundan geçen ve

$P \ldots\ x-y+z+1=0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

d den geçen tüm düzlemler,

$$2x+y-5+\lambda(x+z-6)=0$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)x+y+\lambda z-5-6\lambda=0$$

şeklindedir. $\vec{n}_P=(1,-1,1)$, $\vec{n}_\lambda=(2+\lambda,1,\lambda)$ olup

$\vec{n}_P \perp \vec{n}_\lambda$ olacaktır.

$$\Rightarrow 2+\lambda-1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x+y-\frac{1}{2}z-2=0$$

$$\Rightarrow 3x+2y-z-4=0 \text{ olur.}$$

258

290

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 16

291

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17

292

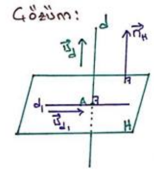
Örnek: $d \ldots (\overbrace{x+2y+4z-2=0}^{P},\ \overbrace{2x+3y-2z+3=0}^{Q})$ doğrusunun

$H \ldots\ 2x-y+4z+8=0$ düzlemini deldiği A noktasından geçen,

H düzleminde bulunan ve d doğrusuna dik olan d_1 doğrusunu

bulunuz.

Çözüm:



Önce $d \cap H=\{A\}$ olan A noktasını bulalım:

Bunun için

$$\begin{cases} x+2y+4z-2=0 \\ 2x+3y-2z+3=0 \\ 2x-y+4z+8=0 \end{cases}$$

sisteminin çözümünü bulmalıyız.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-46$$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-46}=-4 \ ,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \end{vmatrix}}{-46}=2 \ ,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix}}{-46}=\frac{1}{2}$$

259

293

$\Rightarrow A(-4, 2, \frac{1}{2})$ olur.

$\vec{u}_{d_1} = (a,b,c)$ olsun. $\vec{n}_H = (2,-1,4)$ olmak üzere,

$\vec{u}_{d_1} \perp \vec{n}_H \Rightarrow \langle \vec{u}_{d_1}, \vec{n}_H \rangle = 0 \Rightarrow 2a - b + 4c = 0 \ldots (1)$

$$\vec{u}_d = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 10, -1)$$

$\vec{u}_{d_1} \perp \vec{u}_d \Rightarrow \langle \vec{u}_{d_1}, \vec{u}_d \rangle = 0 \Rightarrow -16a + 10b - c = 0 \ldots (2)$

(1) ve (2) de $a = 1$ alınırsa, $b = \frac{46}{39}$ ve $c = -\frac{164}{39}$ bulunur.

$\Rightarrow \vec{u}_{d_1} = (39, 46, -164)$ alınabilir.

$A(-4, 2, 1/2)$ olduğundan

$d_1 \ldots \frac{x+4}{39} = \frac{y-2}{46} = \frac{z-1/2}{-164} = \lambda$ bulunur.

260

294

Örnek: $x+y+z-1=0$ ve $mx-2ny+z-\ell=0$ düzlemlerinin

a) Paralel

b) Çakışık

Olmaları için m, n ve ℓ arasındaki bağıntı ne olmalıdır.

295

Örnek: $A(1,2,-4)$ noktasından geçen ve xoy düzlemine paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

xoy düzleminin denklemi $z=0$ normali de $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ dir. Aradığımız düzlem xoy düzlemine paralel olacağından bu düzlemin normali de $\vec{e}_3$ olur.

$\Rightarrow P \ldots 0x + 0y + z + d = 0$

$A \in P \Rightarrow -4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$

$\Rightarrow P \ldots z + 4 = 0$ olur.

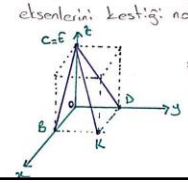
262

296

Örnek: $P_1 \ldots 2x+z-4=0$, $P_2 \ldots 4y+3z-12=0$ düzlemlerinin koordinat düzlemleriyle sınırladığı hacmi bulunuz.

Çözüm:

P_1 in normali $\vec{n}_1 = (2,0,1)$ olup $\vec{n}_1 \perp \vec{e}_2$ dir. O halde y ekseni ya P_1 e paraleldir ya da P_1 in içindedir. y eksenine ait bir nokta $A(0,1,0)$ için $A \notin P_1$ olup P_1 düzlemi y eksenine paraleldir. P_1 in x ve z eksenlerini kestiği noktalar $B(2,0,0)$ ve $C(0,0,4)$ olur. Benzer şekilde P_2 düzlemi de x eksenine paralel olup y ve z eksenlerini kestiği noktalar $D(0,3,0)$ ve $E(0,0,4)$ olur.



İstenilen hacim, OBKDE piramidinin hacmidir. Bu hacim ise $\vec{OB}, \vec{OD}$ ve $\vec{OC}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacminin $\frac{1}{3}$ üne eşittir.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \langle \vec{OB} \times \vec{OD}, \vec{OC} \rangle$

$= \frac{1}{3} \det(\vec{OB}, \vec{OD}, \vec{OC}) = 8 \text{ br}^3$ olur.

263

Örnek: $P \ldots x+2y+3z-6=0$ düzlemine ait olan ve koordinat eksenlerinin P düzlemini deldiği noktalardan eşit uzaklıkta olan noktayı bulunuz.

Çözüm:

Aradığımız nokta $K(x_0,y_0,z_0)$ olsun.

$K \in P$ olduğundan $x_0+2y_0+3z_0-6=0 \ldots (1)$

x ekseninin P yi kestiği nokta $y=z=0$ için $A(6,0,0)$, y ekseninin P yi kestiği nokta $B(0,3,0)$ ve z ekseninin P yi kestiği nokta $C(0,0,2)$ dir.

Hipotezden $\|\vec{AK}\|=\|\vec{BK}\|=\|\vec{CK}\|$ olur.

$\|\vec{AK}\|=\|\vec{BK}\| \Rightarrow 4x_0-2y_0-9=0 \ldots (2)$

$\|\vec{AK}\|=\|\vec{CK}\| \Rightarrow 3x_0-z_0-8=0 \ldots (3)$

(1), (2) ve (3) ortak çözülürse $K\left(\frac{39}{14}, \frac{15}{14}, \frac{5}{14}\right)$ bulunur.

Örnek: $P \ldots 4x-8y+17z-8=0$ düzlemi

$$\lambda_1(5x-y+4z-1)+\lambda_2(2x+2y-3z+2)=0$$

düzlem demetine ait midir?

Çözüm:

$d \ldots (5x-y+4z-1=0,\ 2x+2y-3z+2=0)$ doğrusunu bulalım.

$$z=t \quad \begin{cases} 5x-y=1-4t \\ 2x+2y=-2+3t \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{12}t,\quad y=-1+\frac{23}{12}t$$

$$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x=-\frac{5}{12}t \\ y=-1+\frac{23}{12}t \\ z=t \end{cases} \quad \text{olur.}$$

$d \overset{?}{\in} P \Rightarrow -\frac{5}{3}t+8-\frac{26}{4}t+17t-8=0$ olup $d \in P$ dir.

O halde P düzlemi, verilen düzlem demetine aittir.

Örnek: $P_1 \ldots x+y+z+1=0$, $P_2 \ldots 2x-y+z=0$ düzlemlerinin arakesitinden ve $A(1,0,0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$d \ldots (P_1=0, P_2=0)$ olmak üzere

$$d \ldots \frac{x+1/3}{-2/3}=\frac{y+2/3}{-1/3}=\frac{z}{1}=t$$

bulunur. $t=0$ için $B(-1/3,-2/3,0) \in d$

$t=1$ için $C(1/3,-1/3,-1) \in d$ olur.

A, B ve C den geçen düzlem denklemi yazılırsa

$P \ldots x-2y-1=0$ bulunur.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17

301

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

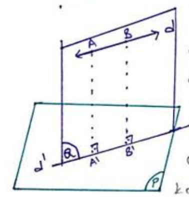
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 18

302

BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEM ÜZERİNDEKİ DİK İZDÜŞÜMÜ



Bir P düzlemi ve P nin dışında olan bir d doğrusu verilsin. d nin P üzerine olan dik izdüşümünü bulmak demek, d nin üzerindeki her noktadan P ye inilen dikmelerin P yi kestiği noktaları bulmak demektir. A, B ∈ d olsun. A ve B den inilen dikmelerin P yi kestiği noktalar A' ve B' olmak üzere, A' ve B' den geçen d' doğrusu d nin P üzerine olan dik izdüşümüdür.

d' yü şu şekilde bulabiliriz: d den geçen ve P ye dik olan Q düzlemi düzlem demeti yardımıyla bulunur.

$d' \ldots (P=0,\ Q=0)$ olacaktır.

267

303

Örnek: $d \ldots (x+y+z-2=0,\ x+2y+z-2=0)$ doğrusunun $P \ldots 3x+y+3z-1=0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

d den geçen tüm düzlemler,

$$x+y+z-2+\lambda(x+2y+z-2)=0$$

$$\Rightarrow (1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(1+\lambda)z-2-2\lambda=0$$

şeklindedir. Bu düzlemlerin içerisinden P ye dik olanı arıyoruz:

$$\vec{n}_\lambda=(1+\lambda,\ 1+2\lambda,\ 1+\lambda),\quad \vec{n}_P=(3,1,3)$$

$$\vec{n}_\lambda \perp \vec{n}_P \Rightarrow 3(1+\lambda)+1+2\lambda+3(1+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow Q \ldots x-6y+z-2=0$$

P ve Q nun denklemleri ortak çözülürse,

$$d' \ldots \frac{x+\frac{2}{19}}{-1}=\frac{y+\frac{5}{19}}{0}=\frac{z}{1}=t \text{ bulunur.}$$

268

304

Örnek: $d \ldots (2x-y+z-1=0,\ x+2y-z+1=0)$ doğrusunun xOz düzlemi üzerine dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

d den geçen tüm düzlemler,

$$2x-y+z-1+\lambda(x+2y-z+1)=0$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)x+(-1+2\lambda)y+(1-\lambda)z-1+\lambda=0$$

şeklindedir. Bu düzlemlerin içerisinden $P \ldots y=0$ düzlemine dik olanı arıyoruz:

$$\vec{n}_\lambda=(2+\lambda,\ -1+2\lambda,\ 1-\lambda),\quad \vec{n}_P=(0,1,0)$$

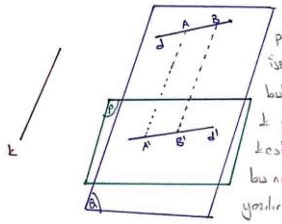
$$\vec{n}_\lambda \perp \vec{n}_P \Rightarrow -1+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1/2 \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow Q \ldots 5x+z-1=0 \text{ olur.}$$

$$d' \ldots (P=0,\ Q=0) \text{ olup } d' \ldots \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-5t \end{cases} \text{ bulunur.}$$

269

BİR DOĞRUNUN VERİLEN BİR DOĞRUYA PARALEL OLARAK BİR DÜZLEM ÜZERİNE İZDÜŞÜMÜ



Bir d doğrusunun k doğrusuna paralel olacak biçimde P düzlemi üzerine izdüşümü olan d' doğrusu bulunurken $A, B \in d$ noktalarından k ya çizilen paralellerin P yi kestiği A' ve B' noktaları bulunup bu noktalardan geçen doğru denklemi yazılır.

Veya;

d den geçen ve k doğrusuna paralel olan Q düzlemi düzlem demeti yardımıyla bulunur.

$$d' \ldots (P=0,\ Q=0) \text{ olur.}$$

Örnek: $d \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = \lambda$ doğrusunun

$k \ldots \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = t$ doğrusuna paralel olacak biçimde

$P \ldots x+z-1=0$ düzlemi üzerine izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} \text{ ve } \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} \text{ den } d \ldots (2x-3y-4=0,\ y-2z-2=0)$$

olur.

d den geçen tüm düzlemler $2x-3y-4+\lambda(y-2z-2)=0$

$$\Rightarrow 2x+(-3+\lambda)y-2\lambda z-4-2\lambda=0$$

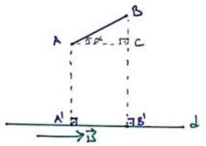
şeklindedir. Bu düzlemlerden k ya paralel olan Q düzlemini arıyoruz.

$$\vec{n}_\lambda = (2, -3+\lambda, -2\lambda),\ \vec{u}_k = (3,1,1) \text{ olup } \vec{u}_k \perp \vec{n}_\lambda \text{ dan } \lambda = 3$$

$$\Rightarrow Q \ldots x-3z-5=0 \text{ bulunur.}$$

$\Rightarrow d' \ldots (P=0, Q=0) \rightarrow d' \ldots x=2,\ y=t,\ z=-1$ bulunur.

BİR DOĞRU PARÇASININ BİR DOĞRU ÜZERİNDEKİ İZDÜŞÜMÜNÜN UZUNLUĞU



$\|\vec{A'B'}\| = ?$

$\|\vec{A'B'}\| = \|\vec{AC}\|$ dir.

$\vec{AB}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı α olmak üzere,

$$\langle \vec{AB}, \vec{u} \rangle = \|\vec{AB}\| . \|\vec{u}\| . \cos\alpha$$

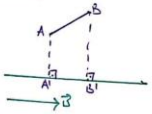
$$= \|\vec{AB}\| . \|\vec{u}\| . \frac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{A'B'}\| = \|\vec{AC}\| = \frac{|\langle AB, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}} \text{ olur.}$$

Örnek:

$\vec{AB} = (-3,7)$ vektörünün $\vec{u} = (3,4)$ doğrultusundaki izdüşümünün uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

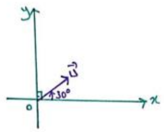


$$\|\vec{A'B'}\| = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$$

$$= \frac{19}{5} \text{ br}$$

309

Not:

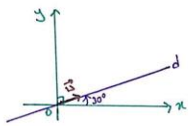


Şekildeki $\vec{u}$ vektörü için $\|\vec{u}\| = 1$ ise

$\vec{u} = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olur.

Örnek: $\vec{AB} = (-3,7)$ vektörünün x ekseniyle 30° lik açı yapan d doğrusu üzerindeki izdüşümünün uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



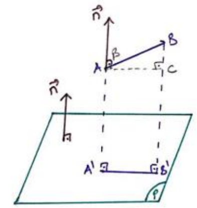
$\vec{u} = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olur.

$$\ell = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|} = \frac{7 - 3\sqrt{3}}{2} \text{ br.}$$

274

310

BİR DOĞRU PARÇASININ BİR DÜZLEM ÜZERİNDEKİ DİK İZDÜŞÜMÜNÜN UZUNLUĞU



$\|\vec{A'B'}\| = ?$

$\|\vec{A'B'}\| = \|\vec{AC}\|$ dir.

$\vec{AB}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı β olsun.

$$\Rightarrow \|\vec{AB} \wedge \vec{n}\| = \|\vec{AB}\| . \|\vec{n}\| . \sin\beta$$

$$= \|\vec{AB}\| . \|\vec{n}\| . \frac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{A'B'}\| = \|\vec{AC}\| = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}} \text{ olur.}$$

275

311

Uzayda Simetri

$A(x,y,z)$ noktasının,

orijine göre simetriği $(-x,-y,-z)$

x eksenine göre simetriği $(x,-y,-z)$

y eksenine göre simetriği $(-x,y,-z)$

z eksenine göre simetriği $(-x,-y,z)$

xoy $(z=0)$ düzlemine göre simetriği $(x,y,-z)$

xoz $(y=0)$ düzlemine göre simetriği $(x,-y,z)$

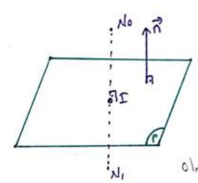
yoz $(x=0)$ düzlemine göre simetriği $(-x,y,z)$ dir.

Bir noktanın herhangi bir düzleme ve herhangi bir doğruya göre simetriğini inceleyelim:

276

312

Düzleme Göre Simetri



$N_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasının $P \ldots ax+by+cz+d=0$ düzlemine göre simetriği $N_1(x_1,y_1,z_1)$ olsun. NN_1 doğru parçasının orta noktası $I\left(\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2}, \frac{z_1+z_0}{2}\right)$

olmak üzere $I \in P \ldots$ (1)

N_0 dan geçen ve doğrultmanı $\vec{n} = (a,b,c)$ olan doğru d olmak üzere $N_1 \in d \ldots$ (2)

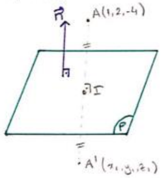
(1) ve (2) den N_1 bulunur.

277

313

Örnek: $A(1,2,-4)$ noktasının $P\ldots\ x+2y-z+9=0$ düzlemine göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Çözüm:



$I\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+2}{2}, \frac{z_1-4}{2}\right)$ olur.

$$I \in P \Rightarrow \frac{x_1+1}{2} + \frac{2(y_1+2)}{2} - \frac{z_1-4}{2} + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1+2y_1-z_1+27=0 \ldots ①$$

A dan geçen ve doğrultmanı $\vec{n}=\vec{u}=(1,2,-1)$ olan doğru

$$d\ldots\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-1} = \lambda$$

$I \in d \Rightarrow x_1=\lambda+1,\ y_1=2\lambda+2,\ z_1=-\lambda-4 \ldots ②$

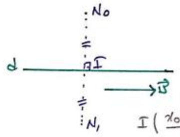
① ve ② den $\lambda=-6$ bulunur.

② den, $x_1=-5$, $y_1=-10$, $z_1=2$ olup $A'(-5,-10,2)$ olur.

278

314

Doğruya Göre Simetri



$N_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasının

$$d\ldots\ \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} = \lambda$$

doğrusuna göre simetriği $N_1(x_1,y_1,z_1)$ olsun.

$I\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right)$ olmak üzere

$I \in d \ldots ①$

$\overrightarrow{N_0N_1} \perp \vec{u} \Rightarrow \langle \overrightarrow{N_0N_1}, \vec{u} \rangle = 0 \ldots ②$

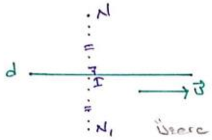
① ve ② den λ_1 bulunur.

279

315

Örnek: $N(1,2,-3)$ noktasının $d\ldots\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} = t$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Çözüm:



N nin simetriği, $N_1(x_1,y_1,z_1)$ olsun.

I orta noktası için

$I\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+2}{2}, \frac{z_1-3}{2}\right)$ olur.

$d\ldots\ x=2t+1,\ y=2t,\ z=3t+1$ olmak üzere $I \in d$ dir.

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{2}=2t+1,\ \frac{y_1+2}{2}=2t,\ \frac{z_1-3}{2}=3t+1$$

$$\Rightarrow x_1=4t+1,\ y_1=4t-2,\ z_1=6t+5 \ldots ①$$

$\overrightarrow{NN_1}=(x_1-1, y_1-2, z_1+3)$, $\vec{u}=(2,2,3)$

$\overrightarrow{NN_1} \perp \vec{u} \Rightarrow 2(x_1-1)+2(y_1-2)+3(z_1+3)=0$

$\Rightarrow 2x_1+2y_1+3z_1+3=0 \ldots ②$

① ve ② den $t=-\frac{8}{17} \Rightarrow x_1=\frac{1}{17},\ y_1=-\frac{66}{17},\ z_1=\frac{37}{17} \Rightarrow N_1\left(\frac{1}{17}, -\frac{66}{17}, \frac{37}{17}\right)$

280

316

Örnek:

$$d\ldots\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=-t \end{cases}$$ doğrusunun $P\ldots\ 2x+2y+z+4=0$ düzlemi

üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

281

317

Örnek: d... $(2x-5y+4z-1=0,\ x+y+3z+5=0)$ doğrusunun yoz düzlemi üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

282

318

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 18