UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

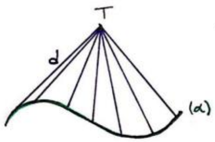
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 1

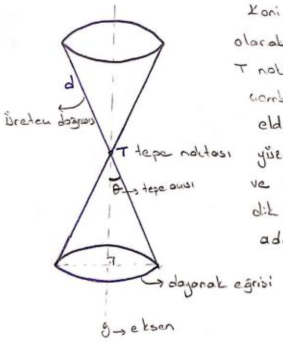
KONİKLER

Koni Yüzeyi

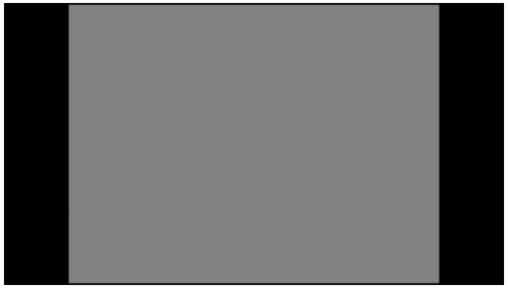


Bir d doğrusunun sabit bir T noktasından geçecek biçimde bir (α) eğrisi boyunca hareketi ile elde edilen yüzeye koni yüzeyi denir. T ye tepe noktası, d ye anadoğru veya üreteç doğrusu, (α) eğrisine de dayanak eğrisi adı verilir.

Dik Dairesel Koni



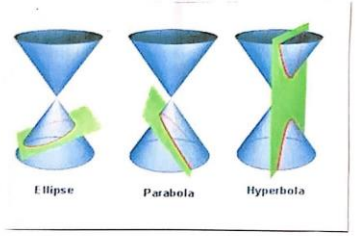
Koni tanımındaki eğriyi çember olarak alırsak, d doğrusunun T noktasından geçecek biçimde çember üzerinde hareketi ile elde edilen dik dairesel koni yüzeyini elde ederiz. T den geçen ve çemberin bulunduğu düzleme dik olan doğruya koninin ekseni adı verilir. Eksenin üreteç doğrusu ile yaptığı açıya tepe açısı denir.



Konikler

Bir dik dairesel koni yüzeyinin bir düzlem ile arakesit noktalarının kümesine koni kesiti veya konik adı verilir.

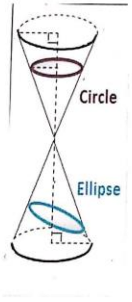
Konikler; elips, parabol ve hiperbol olmak üzere üç çeşittir:



4

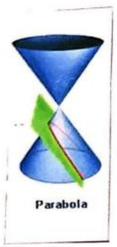
Elips sınıfı için;

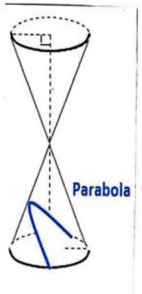
$T \notin P$, $g \nparallel P$ ve $d \nparallel P$ ise konik bir elipstir.



Parabol sınıfı için;

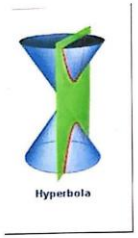
$d \parallel P$ ve $T \notin P$ ise konik paraboldür.

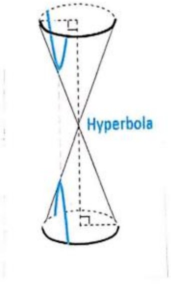




Hiperbol sınıfı için;

$T \notin P$, $g \parallel P$ ise konik konik hiperboldür.

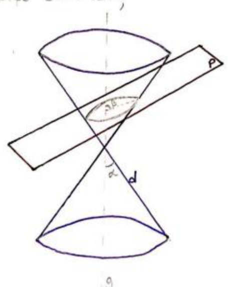




7

Koniğin çeşidini tepe açısını kullanarak da ifade edebiliriz:
Koni yüzeyinin tepe açısı α ve düzlemin üreteç doğrusu ile yaptığı açı da β olsun.

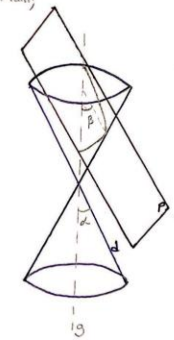
Elips sınıfı için;



$\beta > \alpha$ ise konik elipstir.
Eğer $\beta = 90°$ ise konik çemberdir.

8

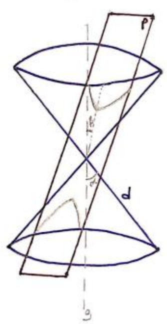
Parabol sınıfı için;



$\alpha = \beta$ ise konik paraboldür.

9

Hiperbol sınıfı için;



$\beta < \alpha$ ise konik hiperboldür.

10

Özel Haller

1) Elips sınıfı için,

a) $g \perp P$ ve $T \notin P$ ise kesit çemberdir. Elips ailesi içinde yer alır.

b) $T \in P$, $d \notin P$, $g \notin P$ ise kesit T noktası olup bu elipse nokta elips adı verilir.

c) $g \perp P$ ve $T \in P$ ise kesit T noktası olup bu elipse nokta çember adı verilir.

2) Hiperbol sınıfı için,

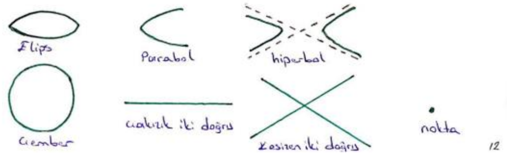
$g \subset P$ kesit T de kesişen bir çift doğru olur. Kesişen iki doğru hiperbol sınıfındandır.

Parabol Sınıf. için,

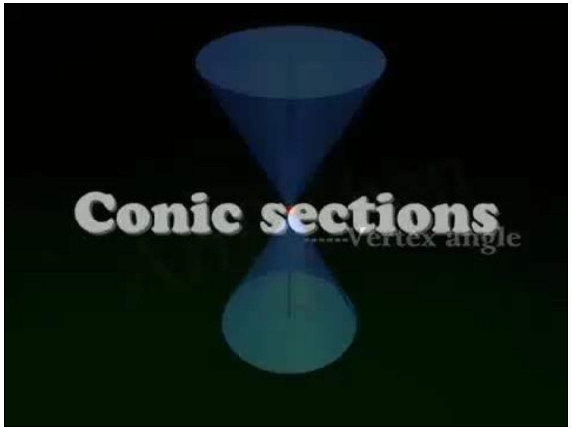
$d \subset P$ ise kesit d doğrusu olur. Çakışık bir doğru çifti parabol sınıfına dahil edilir.

Not: Paralel bir çift doğru da parabol sınıfındandır. Fakat paralel iki doğruyu koni kesiti olarak elde edemeyiz. İleride "Koniklerin Sınıflandırılması" konusu içerisinde bu durum açıklanacaktır.

Konikleri geometrik şekillerle aşağıdaki gibi örnekleyebiliriz:



12



15

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Koni Kesitlerinin Tanıtılması

Ders 1

16

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2

Koniğin Analitik İfadesi

Düzlemde x veya y parametrelerine göre 2. dereceden bir fonksiyonun belirttiği eğriye **konik** adı verilir. Buna göre $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$ ve A,B,C den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

denklemi bir konik belirtir.

Örnekler

- $2x^2+3xy-5x+4=0$
- $xy+1=0$
- $x^2-5=0$
- $y^2=0$
- $x^2+5y=0$

denklemleri konik belirtir.

Koniğin Denkleminin Belirttiği Eğrinin İncelenmesi

$\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denkleminin belirttiği eğrinin grafiği çizilirken iki yol izlenir:

1) Denklem $y=f(x)$ formuna getirilerek değişimi incelenir ve grafiği çizilir (Analiz derslerinden hatırlıyoruz)

2) Konik denklemi çeşitli koordinat dönüşümleri yardımı ile merkezil hale getirilerek grafiği çizilir.

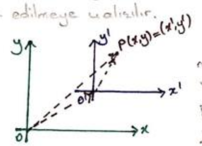
Koordinat dönüşümleri iki tanedir:

- Koordinat eksenlerinin ötelenmesi
- Koordinat eksenlerinin döndürülmesi

Not: Koniğin merkezil hale getirilmesi demek, konik denkleminde yer alan x, y ve xy li terimleri yok ederek konik denklemini daha sade bir duruma getirmek demektir.

Koordinat Eksenlerinin Ötelenmesi

Koordinat eksenlerinin yönü ve doğrultusunu değiştirmeden yer değiştirmesine koordinat eksenlerinin ötelenmesi denir. Bu dönüşüm yardımıyla konik denklemindeki x ve y li terimler yok edilmeye çalışılır.



xoy dik koordinat sisteminin O orijin noktasını $O'(h,k)$ noktasına taşıyalım. Yeni koordinat sistemimiz $x'O'y'$ olsun. Düzlemin bir P noktasının xoy deki koordinatları (x,y) ve $x'O'y'$ deki koordinatları da (x',y') olsun. Şekilden,

$$\vec{OO'}+\vec{O'P}=\vec{OP} \Rightarrow (x,y)=(x',y')+(h,k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}}$$ bulunur.

Not: $\vec{OO'}=\vec{u}=(h,k)$ vektörüne **öteleme vektörü** adı verilir.

Örnek:

xoy dik koordinat sisteminde $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ koniği veriliyor. Öteleme vektörü $\vec{u}=(2,-3)$ olmak üzere koniğin $x'o'y'$ koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

Çözüm:

Koordinat sistemleri arasındaki ilişki,

$$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-3 \end{cases}$$ olur. Bu ifadeler denklemde yazılırsa,

$$(x'+2)^2+(y'-3)^2-4(x'+2)-6(y'-3)+9=0$$

$$\Rightarrow x'^2+y'^2-12y'+32=0$$

olur. Bu son ifade aynı koniğin $x'o'y'$ koordinat sistemindeki denklemidir.

Problem: xoy koordinat sistemini uygun bir ötelemeyle öyle bir $x'o'y'$ koordinat sistemine dönüştürelim ki, koniğin $x'o'y'$ sistemindeki denkleminde 1. dereceden terimler (x ve y li) yer almasın. Böylece konik denklemi daha sade duruma gelsin.

Ötelemenin Genel Konik Denklemine Uygulanması

$\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ genel konik denklemi verilsin. xoy koordinat sistemini $\begin{cases} x = x'+h \\ y = y'+k \end{cases}$ ötelemesiyle $x'o'y'$ koordinat sistemine dönüştürelim. Koniğin yeni koordinat sistemindeki denklemini yazalım:

$$A(x'+h)^2+B(x'+h)(y'+k)+C(y'+k)^2+D(x'+h)+E(y'+k)+F=0$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Ah+Bk+D)x'+(2Ck+Bh+E)y' + \underbrace{(Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F)}_{F'}=0$$

bulunur.

x' ve y' lü terimleri yok etmek için

$$\begin{cases} 2Ah+Bk+D=0 \\ 2Ck+Bh+E=0 \end{cases} \cdots (*)$$

olmalıdır. Yani h ve k yı $(*)$ denklemini sağlayacak şekilde seçersek koniğin yeni koordinat sistemindeki denkleminde 1. dereceden terimler yok olur. Böylece koniğin $x'o'y'$ deki denklemi

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+F'=0 \quad \text{olur.}$$

Not: Konik denklemine öteleme işlemi uygulandığında ilk üç terimin katsayısının değişmediğine ve $F'=\phi(h,k)$ olduğuna dikkat ediniz.

19

Örnek: $x^2-xy+y^2-2x+6y-1=0$ koniğine öteleme işlemi uygulayarak 1. dereceden terimleri yok ediniz. (Yani koniğin tanımlı olduğu xoy koordinat sistemini uygun bir öteleme ile $x'o'y'$ sistemine öteleyiniz. Ötelemeyi öyle seçiniz ki, koniğin $x'o'y'$ sistemindeki denklemi yazıldığında 1. dereceden terimler yer almasın.)

Çözüm:

$x=x'+h$, $y=y'+k$ ötelemesi ile xoy sistemini $x'o'y'$ ye öteleyelim. Koniğin yeni sistemdeki denklemi,

$$(x'+h)^2-(x'+h)(y'+k)+(y'+k)^2-2(x'+h)+6(y'+k)-1=0$$

$$\Rightarrow x'^2-x'y'+y'^2+(\underbrace{2h-k-2}_{0})x'+(\underbrace{-h+2k+6}_{0})y'+(h^2-hk+k^2-2h+6k-1)=0$$

olur. $\begin{cases} 2h-k-2=0 \\ -h+2k+6=0 \end{cases} \Rightarrow h=-\frac{2}{3}$, $k=-\frac{10}{3}$ bulunur.

20

O halde, xoy koordinat sistemini

$$\begin{cases} x=x'-\frac{2}{3} \\ y=y'-\frac{10}{3} \end{cases}$$

ötelemesiyle $x'o'y'$ sistemine ötelersek koniğin yeni sistemdeki denkleminde 1. dereceden terimler yer almaz. Yani konik denklemi daha sade hale gelmiş olur.

$$F'=\phi(h,k)=h^2+k^2-hk-2h+6k-1$$

olup bu değer hesaplanırsa

$$F'=-\frac{93}{9}$$

bulunur. Böylece koniğin $x'o'y'$ deki denklemi,

$$x'^2-x'y'+y'^2-\frac{93}{9}=0$$

olur. ($x^2-xy+y^2-2x+6y-1=0$ ilk sistemdeki denklemi idi.)

21

Not: $\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
denkleminin x ve y ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2Ax+By+D$$
$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = Bx+2Cy+E$$

$O'(h,k)$ olmak üzere $\quad \phi_x|_{O'} = 2Ah+Bk+D$
$\phi_y|_{O'} = Bh+2Ck+E$

için $\phi_x|_{O'}=0$ ve $\phi_y|_{O'}=0$ denklemlerinin h ve k yı bulmak için kullanılan $(*)$ denklemleri ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

Not: $4AC-B^2=0$ ise h ve k yı bulmak için bu yöntem kullanılamaz

22

Örnek:

$x^2+y^2-2x+2y-2=0$ koniğine öteleme işlemi uygulayarak 1. dereceden terimleri yok ediniz.

Çözüm:

$$\phi_x = 2x-2, \quad \phi_y = 2y+2$$

$O'(h,k)$ için $\quad \phi_x|_{O'} = 2h-2=0 \Rightarrow h=1$
$\phi_y|_{O'} = 2k+2=0 \Rightarrow k=-1$

O halde uygun öteleme $\begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$ olur.

$F' = \phi(h,k) = \phi(1,-1) = 1^2+(-1)^2-2.1+2(-1)-2 = -4$ olup koniğin $x'o'y'$ deki denklemi $x'^2+y'^2-4=0$ dır.

Örnek: $x^2-2xy+y^2-2x+3y-1=0$ koniği için yukarıdaki yöntemin kullanılamayacağını gösteriniz.

23

27

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 2

28

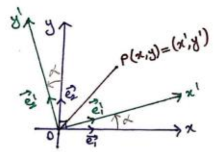
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 3

Koordinat Eksenlerinin Döndürülmesi



xoy dik koordinat sistemini α açısı kadar döndürelim. Koordinat sisteminin yeni konumu $x'oy'$ olsun.

Düzlemin bir P noktasının xoy deki koordinatları (x,y), $x'oy'$ deki koordinatları da (x',y') olsun.

$$\Rightarrow \vec{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}'$$

eşitliğin her iki yanını önce $\vec{e_1}$, sonra $\vec{e_2}$ ile iç çarpalım:

$\vec{e_1}$ ile : $\quad x\underbrace{\langle \vec{e_1},\vec{e_1}\rangle}_{1} + y\underbrace{\langle \vec{e_2},\vec{e_1}\rangle}_{0} = x'\underbrace{\langle \vec{e_1}',\vec{e_1}\rangle}_{\cos\alpha} + y'\underbrace{\langle \vec{e_2}',\vec{e_1}\rangle}_{\cos(90+\alpha)}$

e_2 ile : $\quad x\underbrace{\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\rangle}_{0} + y\underbrace{\langle \vec{e_2},\vec{e_2}\rangle}_{1} = x'\underbrace{\langle \vec{e_1}',\vec{e_2}\rangle}_{\cos(90-\alpha)} + y'\underbrace{\langle \vec{e_2}',\vec{e_2}\rangle}_{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad \text{bulunur.}$$

Dönmenin Genel Konik Denklemine Uygulanması

Problem: xoy koordinat sistemini uygun bir dönmeyle öyle bir $x'oy'$ koordinat sistemine dönüştürelim ki, koniğin $x'oy'$ sistemindeki denkleminde xy li terim yer almasın. Böylece konik denklemi daha sade hale gelsin.

$\Phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ genel konik denklemi verilsin. xoy sistemini α açılı dönmeyle $x'oy'$ sistemine dönüştürelim. Bu dönmenin denklemi,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

dır. Koniğin yeni koordinat sistemindeki denklemini yazalım:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2$$
$$+ D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$(A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)x'^2 + (-2A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha)x'y'$$
$$+ (A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y'^2 + (D\cos\alpha + E\sin\alpha)x' + (-D\sin\alpha + E\cos\alpha)y'$$
$$+ F = 0$$

bulunur. $x'y'$ lü terimi yok etmek için

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow -A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0$$
$$\Rightarrow (-A+C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}} \quad \text{bulunur.}$$

O halde xoy sistemi yukarıdaki bağıntıyı sağlayan bir α açısı kadar döndürülürse yeni oluşan $x'oy'$ sisteminde koniğin denklemini yazdığımızda $x'y'$ lü terim yer almaz.

Böylece koniğin $x'oy'$ deki denklemi,

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad \text{olur.}$$

Not: Dönmeden sonra sabitin değişmediğine dikkat ediniz.

Örnek: $xy - 1 = 0$ koniğine dönme işlemi uygulayınız. (Yani koniğin tanımlı olduğu xoy sistemini uygun bir dönme ile $x'oy'$ sistemine dönüştürünüz. Dönme açısını öyle seçiniz ki koniğin $x'oy'$ sisteminde denklemi yazıldığında $x'y'$ lü terim yer almasın)

Çözüm:

$A = 0,\ B = 1,\ C = 0$ dır.

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{1}{0}$$

Bu eşitlikteki açı için $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ olur.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$ denklemlerinde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alınırsa

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$ bulunur.

Koniğin $x'oy'$ deki denklemi,

$xy-1=0$ dan

$\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y')=0$

$\Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 0$ olur.

Örnek: $x^2+2xy+y^2-x+y+1=0$ koniğine dönme işlemi uygulayınız

Çözüm:

$A=1, B=2, C=1$ olup $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{2}{0}$

bu koşulu sağlayan açı $2\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ olur.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$ olur.

Konik denkleminde yerine yazılırsa

$2x'^2+\sqrt{2}y'+1=0$

bulunur.

* Bu denklemin bir parabol belirttiğine dikkat ediniz.

35

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 3

36

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4

Örnek: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

İlk olarak dönme işlemi uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{6}{5-5} = \frac{6}{0} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

dönme denklemini konik denkleminde yerine yazarak xoy sisteminin $\alpha = \frac{\pi}{4}$ kadar döndürülmesiyle elde edilen $x'oy'$ sisteminde koniğin denklemini bulmuş oluruz:

$\Rightarrow 8x'^2+2y'^2+4\sqrt{2}y'-4=0$ bulunur. Şimdi de bu denkleme öteleme işlemini uygulayalım. Yani $x'oy'$ sisteminin O orijinini $O'(h,k)$ noktasına taşıyıp yeni oluşan $x''o'y''$ sisteminde koniği yazalım. Ayrıca, h ve k yı öyle seçelim ki koniğin son denkleminde 1. dereceden terimler yer almasın.

$$\begin{cases} x' = x''+h \\ y' = y''+k \end{cases}$$

ötelemesini konik denklemine uygularsak,

$$8x''^2+2y''^2+\underbrace{16h}_{0}x''+\underbrace{(4k+4\sqrt{2})}_{0}y''+(8h^2+2k^2+4\sqrt{2}k-4)=0$$

bulunur.

O halde $h=0$, $k=-\sqrt{2}$ alınırsa 1. dereceden terimler yok olur. Böylece koniğin denklemi,

$$8x''^2+2y''^2=20$$

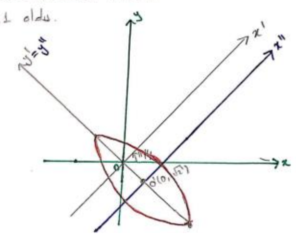
$$\Rightarrow \frac{x''^2}{5/2}+\frac{y''^2}{10}=1 \text{ olur.}$$

31

Koniğin xoy deki denklemi: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$

xoy sistemini O etrafında $\alpha=\frac{\pi}{4}$ kadar döndürüp $x'oy'$ sistemini elde ettik. Koniğin bu sistemdeki denklemi $8x'^2+2y'^2+4\sqrt{2}y'-4=0$ oldu. $x'oy'$ sistemini $x=x'$, $y=y'-\sqrt{2}$ ötelemesi ile $x''o'y''$ sistemine taşıdık. Koniğin bu sistemdeki denklemi

$\frac{x''^2}{5/2}+\frac{y''^2}{10}=1$ oldu.



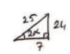
32

Örnek $16x^2+24xy+9y^2-30x+40y=0$ koniğini merkezil hale getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Önce dönme işlemi uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{24}{7}$$



2α açısı ya 1. ya da 3. bölgededir. Biz 1. bölgede alalım. Bu durumda α açısı da 1. bölgede olacaktır.

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \quad \cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ den $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ bulunur.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ dan $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ olur.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

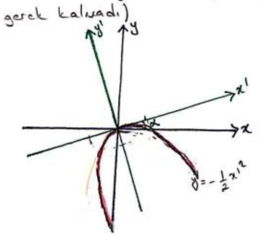
33

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \\ y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' - 3y') \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y') \end{cases}$$

Bu ifadeler $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$ konik denkleminde yerine yazılırsa

$$25x'^2 + 50y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x'^2$$ elde edilir.

(Ötelemeye gerek kalmadı)



Örnek: $2xy - x - y + 4 = 0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Önce öteleme işlemi uygulayalım:

$$\phi_x = 2y - 1 \Rightarrow \phi_x(h,k) = 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$
$$\phi_y = 2x - 1 \Rightarrow \phi_y(h,k) = 2h - 1 = 0 \Rightarrow h = 1/2$$

O halde öteleme, $\begin{cases} x = x' + 1/2 \\ y = y' + 1/2 \end{cases}$ olur.

$$F' = \phi(h,k) = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

O halde koniğin $x'O'y'$ deki denklemi $2x'y' + \frac{7}{2} = 0$ dır.

Şimdi dönme işlemini uygulayalım:

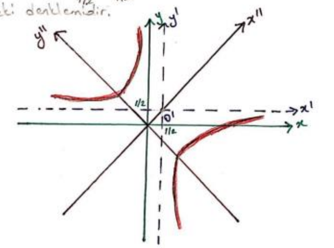
$$\tan 2\alpha = \frac{2}{0-0} = \frac{2}{0} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \end{cases}$$ dönme denklemi elde edilir. Bu denklem

koniğin son denkleminde yazılırsa, $2x'y' + \frac{7}{2} = 0$ dan

$$-\frac{x''^2}{7/2} + \frac{y''^2}{7/2} = 1$$ elde edilir. Bu denklem koniğin $x''O'y''$ deki denklemidir.

$\left[O'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ ve } \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$



Uyarı: Konik parabol ise yani $4AC - B^2 = 0$ ise (ileride açıklanacak) öteleme için kısmi türev kullanılmadığını biliyoruz. Bu şekildeki denklemlere öteleme işlemi uygulandığında 1. dereceden terimlerin (x ve y li) her ikisi de yok olmaz. Bu durumda bu terimlerden birisi ve sabiti yok edecek şekilde bir öteleme aranır. (Çünkü asıl amaç konik denkleminin sade hale getirilmesidir. Örneğin; $\phi(x,y) = 0$ koniğine $x = x' + h, y = y' + k$ ötelemesi uygulandığında koniğin $x'O'y'$ deki denklemi,

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 + (h+1)x' + \sqrt{2}y' + (h^2 - 2k + 1) = 0$$

olsun. Bu durumda $h + 1 = 0$ ve $h^2 - 2k + 1 = 0$ olan h ve k değerleri bulunur. Yani 1. dereceden terimler yok edilemiyorsa bu terimlerden biri ve sabit yok edilir.

Örnek: $x^2-2xy+y^2+4x+8y+10=0$ koniğini standart forma getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=0$ dır. Önce dönme işlemini uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = -\frac{2}{0}$$

olup yukarıdaki koşulu sağlayan $2\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$ olur.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \end{cases} \text{ olur.}$$

Bu eşitlikler konik denkleminde yazılırsa koniğin xoy sistemini O etrafında $\frac{3\pi}{4}$ kadar döndürülmesiyle elde edilen $x'oy'$ deki denklemi

$$2x'^2+2\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+10=0 \text{ bulunur.}$$

38

Şimdi de $x'oy'$ sistemini $\begin{cases} x' = x''+h \\ y' = y''+k \end{cases}$ ötelemesiyle $x''o'y''$ sistemine öteleyelim. Koniğin yeni sistemdeki denklemini yazalım:

$$2x'^2+2\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+10=0$$

$$\Rightarrow 2x''^2+(\underbrace{4h+2\sqrt{2}}_{0})x''-6\sqrt{2}y''+(\underbrace{2h^2+2\sqrt{2}h-6\sqrt{2}k+10}_{0})=0 \text{ olur.}$$

$4h+2\sqrt{2}=0 \Rightarrow h=-\sqrt{2}/2$, $2h^2+2\sqrt{2}h-6\sqrt{2}k+10=0 \Rightarrow k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ olur.

O halde koniğin $x''o'y''$ deki denklemi

$$2x''^2-6\sqrt{2}y''=0$$

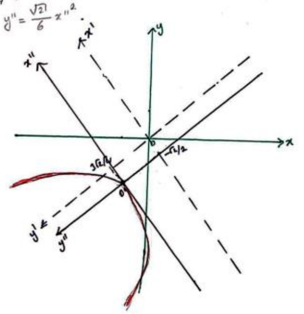
$$\Rightarrow y''=\frac{\sqrt{2}}{6}x''^2 \text{ bulunur.}$$

39

$\Rightarrow$ xoy deki denklem : $x^2-2xy+y^2+4x+8y+10=0$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}$ dönme ile elde edilen $x'oy'$ deki denklem: $2x'^2+2\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+10=0$

$O'(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4})$ noktasına yapılan ötelemeyle elde edilen $x''o'y''$ deki denklem : $y''=\frac{\sqrt{2}}{6}x''^2$.



40

Örnek: $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2\neq 0$ dır. Öteleme işlemi uygulayalım:

$\phi_x = 2x-4 \Rightarrow \phi_x(h,k)=2h-4=0 \Rightarrow h=2$

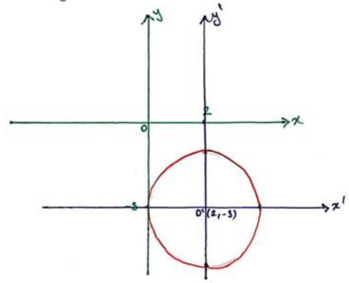
$\phi_y = 2y+6 \Rightarrow \phi_y(h,k)=2k+6=0 \Rightarrow k=-3$

$F' = \phi(h,k) = h^2+k^2-4h+6k+9=-4$

O halde koniğin $\begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-3 \end{cases}$ ötelemesi sonucu elde edilen $x'o'y'$ deki denklemi, $x'^2+y'^2=4$ olup çemberdir.

41

O'(2,-3) ve $x'^2+y'^2=4$ idi.



42

Not: Öteleme ve dönme işlemlerinin sırası önemli değildir.

Örnek: $x^2+y^2-4x+6y+17=0$ koniğini merkezil hale getiriniz.

Çözüm:

$$\phi_x=2x-4 \Rightarrow \phi_x(h,k)=2h-4=0 \Rightarrow h=2$$
$$\phi_y=2y+6 \Rightarrow \phi_y(h,k)=2k+6=0 \Rightarrow k=-3$$

$$F'=\phi(h,k)=4+9-8-18+17=4$$
$$\Rightarrow x'^2+y'^2=-4$$

Konik sanal çember olup grafiği çizilemez.

43

Örnek: $3x^2+4y^2-12x+4y+13=0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

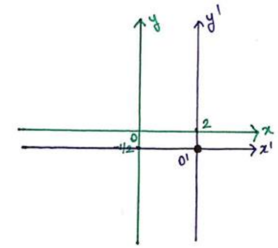
Çözüm:

$4AC-B^2=48\neq 0$. Öteleme uygulayalım:

$$\phi_x=6x-12 \Rightarrow \phi_x(h,k)=6h-12=0 \Rightarrow h=2$$
$$\phi_y=8y+4 \Rightarrow \phi_y(h,k)=8k+4=0 \Rightarrow k=-1/2$$
$$F'=\phi(h,k)=0$$

$\Rightarrow$ Koniğin $x'o'y'$ deki denklemi, $3x'^2+4y'^2=0$ olup tek bir noktadan ibarettir. Bu nokta $O'(0,0)$ noktasıdır. Konik nokta elipstir.

44

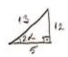


Örnek: $4x^2-12xy+9y^2+20x-30y+25=0$ koniğini merkezil hale getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=0$ dır. ilk olarak dönme uygulayalım:

$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{12}{5}$



2α açısını 1. bölge de seçelim ($\tan 2\alpha > 0$) Bu durumda α da 1. bölgede olur.

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ olur.

$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x'-2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y') \end{cases}$ dönme denklemi bulunur.

46

Son denklemleri konik denkleminde yerine yazarsak, koniğin α açılı dönme ile elde edilen $x'oy'$ deki denklemi

$13y'^2-10\sqrt{13}\,y'+25=0$ bulunur. $x'oy'$ sistemini

$\begin{cases} x' = x''+h \\ y' = y''+k \end{cases}$ ötelemesiyle $x''o'y''$ sistemine dönüştürelim. Koniğin son sistemdeki denklemi,

$$13y''^2+(\underbrace{26k-10\sqrt{13}}_{0})y''+13k^2-10\sqrt{13}\,k+25=0$$

olur.

$26k-10\sqrt{13}=0 \Rightarrow k=\frac{5\sqrt{13}}{13}$, $13k^2-10\sqrt{13}\,k+25=0$ olur.

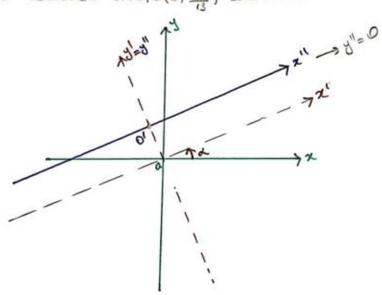
$\Rightarrow \begin{cases} x' = x''+h \\ y' = y''+\frac{5\sqrt{13}}{13} \end{cases}$ ötelemesi ile koniğin $x''o'y''$ deki denklemi,

$13y''^2=0 \Rightarrow y''^2=0$ (çakışık iki doğru)

olur.

47

Öteleme vektörünü $(h,k)=(0,\frac{5\sqrt{13}}{13})$ alabiliriz.



48

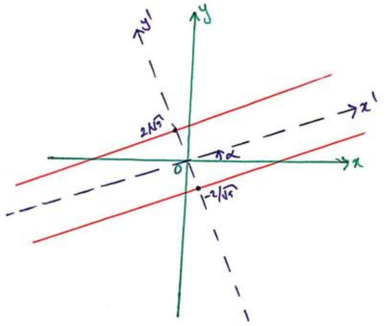
Örnek: $x^2-4xy+4y^2-4=0$ koniğini standart forma getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm: $4AC-B^2=0$ dır. Önce dönme uygulayalım:

$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ olur.

Dönme denklemi $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') \end{cases}$ elde edilir. Koniğin $x'oy'$ deki

denklemi $y'^2=\frac{4}{5} \Rightarrow y' = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$ olur. (paralel iki doğru)



Problemler

Aşağıdaki konikleri merkezil hale getirip grafiklerini çiziniz.

1) $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$
2) $25x^2+14xy+25y^2+22x-86y-191=0$
3) $8x^2-12xy+17y^2-4\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y-15=0$
4) $x^2-2xy+y^2+4x+8y+10=0$
5) $3x^2-10xy+3y^2+x-3y=0$
6) $x^2+3xy+4y^2-2x+6y+1=0$
7) $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$
8) $9x^2+4xy+6y^2+12x+36y+44=0$
9) $3x^2+3y^2-4x+2y+6=0$
10) $y^2-6y-4x+5=0$
11) $xy-2y-4x=0$

51

12) $9x^2+24xy+16y^2+80x-60y=0$
13) $16x^2+24xy+9y^2-30x+40y=0$
14) $x^2+4y^2-4xy-4=0$
15) $x^2-3xy+5y^2+3x+y-3=0$

60

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 4

61

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5

KONİKLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde bir konik denklemi verildiğinde denklemin katsayılarını kullanarak koniğin çeşidini belirleyeceğiz:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \ldots (1)$$

genel konik denklemine eksenlerin döndürülmesi işlemi uygulanırsa

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0 \ldots (2)$$

bulunur. A' ve C' için üç durum vardır

1) $A' \neq 0$, $C' \neq 0$ **2)** $A' \neq 0$, $C'=0$ **3)** $A'=0$, $C' \neq 0$

Şimdi bu durumları irdeleyelim:

1) $A' \neq 0$ ve $C' \neq 0$ olsun. Bu durumda da

a) A' ile C' aynı işaretlidir **b)** A' ile C' zıt işaretlidir.

1a) A' ile C' aynı işaretli olsun. $A'>0$ ve $C'>0$ alalım. ($A'<0$, $C'<0$ ise denklemin her iki yanı (-1) ile çarpılarak $A'>0$, $C'>0$ yapılabilir)

53

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0 \ldots (2)$$

denklemine öteleme işlemi uygulanırsa

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0 \ldots (3)$$

bulunur. Burada 3 durum vardır:

i) $F'<0$ **ii)** $F'=0$ **iii)** $F'>0$

Şimdi bu durumları inceleyelim:

i) $F'<0$ olsun.

$$\Rightarrow A'x''^2+C'y''^2=-F' \Rightarrow \frac{x''^2}{\underbrace{\underset{>0}{-\frac{F'}{A'}}}_{a^2}}+\frac{y''^2}{\underbrace{\underset{>0}{-\frac{F'}{C'}}}_{b^2}}=1 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1 \text{ (reel elips)}$$

* $A'=C'$ için çember olacağına dikkat ediniz.

ii) $F'=0$ olsun

$$\Rightarrow A'x''^2+C'y''^2=0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\underbrace{\frac{1}{A'}}_{a^2}}+\frac{y''^2}{\underbrace{\frac{1}{C'}}_{b^2}}=0 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=0 \text{ (Nokta elips)}$$

* $A'=C'$ için nokta çember olacağına dikkat ediniz.

54

iii) $F'>0$ olsun.

$$\Rightarrow A'x''^2+C'y''^2=-F' \Rightarrow \frac{x''^2}{\underbrace{\frac{F'}{A'}}_{a^2}}+\frac{y''^2}{\underbrace{\frac{F'}{C'}}_{b^2}}=-1 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1 \text{ (sanal elips)}$$

Not:

* $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1 \rightarrow$ reel elips, $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{a^2}=1 \rightarrow$ reel çember

* $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=0 \rightarrow$ nokta elips, $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{a^2}=0 \rightarrow$ nokta çember

* $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1 \rightarrow$ sanal elips, $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{a^2}=-1 \rightarrow$ sanal çember

dir.

1b) A' ile C' zıt işaretli olsun.

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0 \ldots (3)$$

denklemi için iki durum söz konusudur.

55

i) $F' \neq 0$ ii) $F' = 0$

Şimdi bu durumları irdeleyelim:

$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \ldots (3)$

i) $F' \neq 0$ olsun.

$$\Rightarrow \frac{x''^2}{-\frac{F'}{A'}} + \frac{y''^2}{-\frac{F'}{C'}} = 1 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ veya } -\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ (hiperbol)}$$

biri pozitif diğeri negatif

* $A' = -C'$ ise ikizkenar hiperbol olacaktır.

Not:

$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ veya $-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ hiperbol denkleminde $a = b$

olursa hiperbole ikizkenar hiperbol denir.

ii) $F' = 0$ olsun.

(3) den $A'x''^2 + C'y''^2 = 0 \Rightarrow y'' = \mp\sqrt{\frac{A'}{C'}}\, x''$ olur.

56

$y'' = \mp\sqrt{\frac{A'}{C'}}\, x''$ denklemi kesişen iki doğru belirtir. Hiperbol sınıfına dahil edilir.

1) $A' \neq 0, C' \neq 0$ **2)** $A' \neq 0, C' = 0$ **3)** $A' = 0, C' \neq 0$ almış idik.

Şimdi 2 yi inceleyelim:

2) $A' \neq 0$ ve $C' = 0$ olsun.

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ koniğinin dönmeden sonraki denklemi

$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (2)$

idi. Bu denklem

$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (4)$

olur. Burada 4 durum vardır:

a) $D' \neq 0, E' \neq 0$ **b)** $D' \neq 0, E' = 0$ **c)** $D' = 0, E' \neq 0$ **d)** $D' = 0, E' = 0$

Bu durumları inceleyelim:

57

2a) $D' \neq 0, E' \neq 0$ olsun.

$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (4)$

denklemine öteleme işlemi uygulanırsa, $O'(h,k)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases}$$ ötelemesi için

$$A'(x''+h)^2 + D'(x''+h) + E'(y''+k) + F = 0$$

$$\Rightarrow A'x''^2 + \underbrace{(2A'h + D')}_{0}x'' + E'y'' + \underbrace{A'h^2 + D'h + E'k + F}_{0} = 0$$

Yukarıdaki katsayıları sıfır yapan h ve k değerleri bulunabilir. O halde konik denklemi,

$$A'x''^2 + E'y'' = 0$$

$\Rightarrow y'' = -\frac{A'}{E'}x''^2$ olup parabol denklemidir.

58

2b) $D' \neq 0, E' = 0$ olsun.

$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (4)$

denklemi $A'x'^2 + D'x' + F = 0$ olur. $x' = x'' + h$, $y' = y'' + k$ uygulanırsa

$$A'x''^2 + \underbrace{(2A'h + D')}_{0}x'' + \underbrace{A'h^2 + F}_{F'} = 0$$

ifadeyi sıfır yapan h değeri bulunur. Sabite de F' denilirse

$A'x''^2 + F' = 0$ bulunur.

$\Rightarrow x''^2 = -\frac{F'}{A'}$ olur.

i) $-\frac{F'}{A'} > 0$ ise $x''^2 = a^2 \Rightarrow x'' = \mp a$ paralel iki doğru olup parabol sınıfına dahil edilir.

ii) $-\frac{F'}{A'} < 0$ ise $x''^2 = -a^2$ olup sanaldır. Grafiği çizilmez.

iii) $-\frac{F'}{A'} = 0$ ise $x''^2 = 0 \Rightarrow x'' = 0$ olup çakışık iki doğrudur. Parabol sınıfındadır.

59

2c) $D'=0,\ E'\neq 0$ olsun.

$$A'x'^2+D'x'+E'y'+F=0 \quad \ldots (4)$$

denklemi $A'x'^2+E'y'+F=0$ olur. $x'=x''+h,\ y'=y''+k$ uygulanırsa,

$$A'x''^2+\underbrace{2A'h}_{0}x''+E'y''+\underbrace{A'h^2+E'k+F}_{0}=0$$

ifadeleri sıfır yapan h ve k değerleri bulunabilir. Koniğin denklemi

$y''=-\dfrac{A'}{E'}x''^2$ olup paraboldür.

2d) $D'=0,\ E'=0$ olsun.

(4) den $A'x'^2+F=0$ bulunur.

$\Rightarrow x'^2=-\dfrac{F}{A'}$

i) $-\dfrac{F}{A'}>0$ ise paralel iki doğru **ii)** $-\dfrac{F}{A'}<0$ ise sanaldır **iii)** $-\dfrac{F}{A'}=0$ ise çakışık iki doğrudur.

60

1) $A'\neq 0,\ C'\neq 0$ **2)** $A'\neq 0,\ C'=0$ **3)** $A'=0,\ C'\neq 0$ almış idik.

3) $A'=0,\ C'\neq 0$ olsun. Bu gruptaki konik sınıflandırması 2. gruptakine benzer biçimdedir.

Teorem: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ koniğine

$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$ dönmesini uygulayalım:

$$\underbrace{(\ldots)}_{A'}x'^2+\underbrace{(\ldots)}_{B'}x'y'+\underbrace{(\ldots)}_{C'}y'^2+\underbrace{(\ldots)}_{D'}x'+\underbrace{(\ldots)}_{E'}y'+F=0$$

$\Rightarrow A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$ bulunur. (Katsayılar dönme denklemi yerine yazılarak bulunabilir)

Bu durumda,

1) $4A'C'-B'^2=4AC-B^2$

2) $A'+C'=A+C$

3) $A'-C'=\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}$ dir.

61

Özet ve Sonuç

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ koniğine dönme işlemi uygulayarak $A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$ $(B'=0)$ elde edildi.

1) $A'>0,\ C'>0$ için konik elips sınıfından bulundu.

$\Rightarrow 4A'C'-B'^2>0$ dır. Teoremden $4A'C'-B'^2=4AC-B^2$ olduğundan elips sınıfı için $4AC-B^2>0$ dır.

$A'=C'$ ise elips çember oluyordu. Teoremden

$A'-C'=\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}=0 \Rightarrow A=C$ ve $B=0$ dır.

O halde $A=C$ ve $B=0$ ise konik çemberdir.

2) A' ile C' zıt işaretli ise konik hiperbol sınıfından bulundu.

$4A'C'-B'^2<0 \Rightarrow 4AC-B^2<0$ dır.

$\Rightarrow$ $4AC-B^2<0$ ise konik hiperbol sınıfındandır.

$A'=-C'$ ise hiperbol ikizkenar hiperbol oluyordu.

Teoremden $A'+C'=A+C$ olduğundan ikizkenar hiperbol için $A=-C$ olmalıdır.

62

3) $A'\neq 0,\ C'=0$ veya $A'=0,\ C'\neq 0$ ise konik parabol sınıfından bulundu.

$\Rightarrow 4A'C'-B'^2=0 \Rightarrow 4AC-B^2=0$ olur.

O halde $4AC-B^2=0$ ise konik parabol sınıfındandır.

Örnek:

$y^2-6y+4x+5=0$ koniğinin çeşidini belirleyiniz.

Çözüm:

$A=0,\ B=0,\ C=1 \Rightarrow 4AC-B^2=0$ olup konik paraboldür.

Örnek:

$x^2+xy+y^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{6}=0$ koniğinin çeşidini belirleyiniz.

Çözüm:

$A=1,\ B=1,\ C=1 \Rightarrow 4AC-B^2=3>0$ O halde konik elipstir.

63

Örnek: $8x^2+4\lambda xy+\lambda(\lambda+1)y^2+y+5=0$ konik ailesindeki koniklerin sınıflarını λ parametresine göre irdeleyiniz.

Çözüm:

$$4AC-B^2=16\lambda^2-32\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ veya } \lambda=-2 \text{ olur.}$$

λ		-2		0	
$4AC-B^2$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$

$\Rightarrow$ $\lambda=0$ ve $\lambda=-2$ ise konik paraboldür

$-2<\lambda<0$ için konik hiperboldür

$\lambda<-2$ veya $\lambda>0$ için konik elipstir.

* Ailedeki parabollerin denklemlerini yazalım

$\lambda=0$ için $8x^2+y+5=0$

$\lambda=-2$ için $8x^2-8xy+2y^2+y+5=0$ olur.

64

* Ailede çember var mıdır?

$$8x^2+4\lambda xy+\lambda(\lambda+1)y^2+y+5=0$$

Çember için $B=0$ ve $A=C$ olmalı. Bu mümkün olmadığından ailede çember yoktur.

* Ailede ikizkenar hiperbol var mıdır?

$A=-C$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \lambda(\lambda+1)=-8 \Rightarrow \lambda^2+\lambda+8=0$$

Bu denklemin kökü olmadığından ailede ikizkenar hiperbol yoktur.

Örnek: $\lambda x^2+2\lambda xy-3y^2+2x+y+1=0$ konik ailesini λ ya göre irdeleyiniz. Ailede parabol, çember ve ikizkenar hiperbol varsa denklemlerini yazınız.

Uyarı

$\Delta=4AC-B^2$ ve $K=\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$ olmak üzere,

1) $\Delta>0$ için,

* $K<0$ ise konik elips * $K=0$ ise konik nokta elips * $K>0$ ise sanal elipstir

2) $\Delta<0$ için,

* $K\neq 0$ ise konik hiperbol * $K=0$ ise konik kesişen bir çift doğrudur

3) $\Delta=0$ için,

* $K\neq 0$ ise konik parabol * $K=0$ ise paralel veya çakışık bir doğrudur

67

Örnek: $4x^2-4xy+y^2-6x+3y+2=0$ koniğinin çeşidini belirleyiniz.

Çözüm:

$\Delta = 4.4.1-16=0$ (parabol sınıfı)

$$K=\begin{vmatrix} 8 & -4 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$\rightarrow$ paralel veya çakışık iki doğru.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 5

78

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 6

79

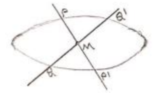
KONİKLERİN ELEMANLARI

Bu kısımda, $\phi(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemi ile verilen koniğin aşağıda belirtilen elemanlarını inceleyeceğiz:

1) Merkez
2) Çap (köşegen)
3) Eksen ve tepe (köşe) noktaları
4) Asimptot
5) Odak ve doğrultman
6) Kutup noktası ve kutup doğrusu

KONİKLERDE MERKEZ

$M(x_0,y_0)$ noktasından geçen her doğru koniği bu M noktasına göre simetrik iki noktada kesiyorsa M ye koniğin **merkezi** denir.



Koniğin Merkezinin Bulunması

$\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ koniği verilsin. Koniğin merkezine $M(x_0,y_0)$ diyelim. Şimdi M noktasını bulmaya çalışalım:

M den geçen ve eğimi m olan herhangi bir doğru

$$y-y_0=m(x-x_0)\ ,\ \forall m\in\mathbb{R}$$

şeklindedir.

70

Şimdi, doğru ile koniğin arakesit noktalarını araştıralım. Bunun için

$$\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
$$y-y_0=m(x-x_0)$$

denklemlerini ortak çözmeliyiz. Ortak çözüm yapılırsa,

$$(Cm^2+Bm+A)x^2+(By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+Em+D)\,x$$
$$+\,Cy_0^2-2Cx_0y_0+Cm^2x_0^2+Ey_0-Emx_0+F=0$$

bulunur.

x e göre 2. dereceden olan bu denklemin kökleri doğrunun koniği kestiği noktaların apsisidir. Bu arakesit noktaları P ve Q ile gösterilirse M, P ile Q nun orta noktası olur.

$M(x_0,y_0)$ olmak üzere $\quad x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}$ dır.

71

$$\Rightarrow x_0=-\frac{By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+Em+D}{2(Cm^2+Bm+A)}$$

$$\Rightarrow (2A+Bm)x_0+(B+2mC)y_0+mE+D=0\ \ldots(*)$$
$$\Rightarrow (2Ax_0+By_0+D)+m(2Cy_0+Bx_0+E)=0\ \ldots(**)$$

bulunur. Bu ifade $\forall m\in\mathbb{R}$ için doğru olduğundan

$$2Ax_0+By_0+D=0 \quad \text{ve} \quad 2Cy_0+Bx_0+E=0 \quad \text{olur.}$$

($\forall m$ için $a+bm=0$ ise $a=b=0$ dır. Çünkü $m=0$ için $a=0$, $m=1$ için $a+b=0 \Rightarrow a=0$ olur)

$$\begin{cases}2Ax_0+By_0+D=0\\ Bx_0+2Cy_0+E=0\end{cases}\ \ldots(***)$$

sistemi çözülerek $M(x_0,y_0)$ bulunur. Sistemin tek çözümünün olması için $\begin{vmatrix}2A & B\\ B & 2C\end{vmatrix}=4AC-B^2\neq 0$ olmalıdır.

72

Sonuç: Konik elips veya hiperbol ise merkez tektir. Konik parabol ise ya merkez yoktur ya da sonsuz sayıdadır.

Normalde parabolün merkezi yoktur. Paralel veya çakışık bir çift doğru için merkez sonsuz sayıdadır.

Teorem: $M(x_0,y_0)$ noktasının $\phi(x,y)=0$ koniğinin merkezi olması için gerek ve yeter şart, $\phi_x|_M=0$ ve $\phi_y|_M=0$ olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$) $M(x_0,y_0)$ noktası koniğin merkezi olsun. Bu durumda yukarıda açıklandığı gibi

$$\begin{cases}2Ax_0+By_0+D=0\\ Bx_0+2Cy_0+E=0\end{cases} \quad \text{dır.}$$

$\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l}\phi_x=2Ax+By+D \Rightarrow \phi_x|_M=2Ax_0+By_0+D\\ \phi_y=Bx+2Cy+E \Rightarrow \phi_y|_M=Bx_0+2Cy_0+E\end{array}\right\}\Rightarrow \phi_x|_M=0\ ,\ \phi_y|_M=0.$$

73

($\Leftarrow$) $\Phi_x|_M=0$ ve $\Phi_y|_M=0$ olsun. $M(x_0,y_0)$ noktasının koniğin merkezi olduğunu gösterelim. Bunun için M den geçen her doğrunun koniği M ye göre simetrik iki noktada kestiğini göstermeliyiz.

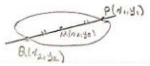
$\Phi_x|_M=0$ ve $\Phi_y|_M=0$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} 2Ax_0+By_0+D&=0 \\ Bx_0+2Cy_0+E&=0 \end{aligned}\right\} \cdots(1)$$

dır. M den geçen tüm doğrular $\forall m\in\mathbb{R}$ için $y-y_0=m(x-x_0)$ şeklindedir. Bu doğrular ile konik denklemi ortak çözülürse

$$(Cm^2+Bm+A)x^2+(By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+Em+D)x$$
$$+Cy_0^2-2Cx_0y_0+Cm^2x_0^2+Ey_0-Emx_0+F=0$$

olur. M nin merkez olduğunu göstermek için yukarıdaki denklemin x_1 ve x_2 olmak üzere, $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$ ve $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$ olduğunu göstermeliyiz.



74

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$$
$$=-\frac{\overbrace{By_0+D}^{-2Ax_0\ ((1)\text{ den})}-mBx_0+m\overbrace{(2Cy_0+E)}^{-Bx_0\ ((1)\text{ den})}-2m^2Cx_0}{2(Cm^2+Bm+A)}$$
$$=-\frac{-2x_0(Cm^2+Bm+A)}{2(Cm^2+Bm+A)}$$

$=x_0$ olur.

$\frac{y_1+y_2}{2}\stackrel{?}{=}y_0$ $\qquad y_1=y_0+m(x_1-x_0)$ ve $y_2=y_0+m(x_2-x_0)$ olduğundan

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_0+mx_1-mx_0+y_0+mx_2-mx_0}{2}$$
$$=\frac{2y_0+m\overbrace{(x_1+x_2)}^{2x_0}-2mx_0}{2}$$

$=y_0$ bulunur.

75

Sonuç: $\phi(x,y)$ koniğinin $M(x_0,y_0)$ merkezini bulmak için

$\Phi_x|_M=0$ ve $\Phi_y|_M=0$ denklemleri çözülerek x_0 ve y_0 bulunur.

Örnek:

$\phi(x,y)=3x^2-10xy+3y^2+x-3y=0$ koniğinin merkezini bulunuz.

Çözüm:

Koniğin merkezi $M(x_0,y_0)$ olsun.

$\phi_x=6x-10y+1 \Rightarrow \phi_x|_M=6x_0-10y_0+1=0$

$\phi_y=-10x+6y-3 \Rightarrow \phi_y|_M=-10x_0+6y_0-3=0$

$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{8},-\frac{1}{8}\right)$ bulunur.

76

Örnek: $x^2+2xy+\lambda y^2+2x-4y+1=0$ konik ailesi veriliyor.

a) Ailedeki koniklerin çeşidini λ ya göre belirleyiniz. Ailede parabol, çember ve ikizkenar hiperbol varsa denklemlerini bulunuz.

b) Ailedeki koniklerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:

b) Koniklerin merkezi $M(x_0,y_0)$ olsun.

$\Phi_x|_M=0$ ve $\Phi_y|_M=0$ dan

$$\begin{cases} x_0+y_0=-1 \\ x_0+\lambda y_0=2 \end{cases}$$ bulunur.

$\Rightarrow x_0=\frac{\lambda+2}{1-\lambda}$, $y_0=\frac{-3}{1-\lambda}$ elde edilir.

$\lambda=\frac{3+y_0}{y_0}$ olmak üzere $x_0=\frac{y_0+1}{-1} \Rightarrow x_0+y_0+1=0$

O halde ailedeki koniklerin merkezleri $x_0+y_0+1=0$ denklemini yani $x+y+1=0$ denklemini sağlar. Bu ise bir doğru denklemidir.

77

Yani ailedeki koniklerin merkezleri bir doğru üzerindedir.

Örnek: $\lambda^2x^2-xy+y^2+x-3y=0$ konik ailesindeki koniklerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: Ailedeki koniklerin merkezi $M(x,y)$ olsun.

$\Phi_x|_M=0$ ve $\Phi_y|_M=0$ dan

$$\begin{cases} 2\lambda^2x-y+1=0 \\ -x+2y-3=0 \end{cases}$$ bulunur.

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{4\lambda^2-1}$, $y=\dfrac{6\lambda^2-1}{4\lambda^2-1}$ olur.

$\lambda^2=\dfrac{x+1}{4x}$ ifadesi y de yerine yazılırsa $2x-y+6=0$ bulunur. O halde ailedeki koniklerin merkezleri $2x-y+6=0$ denklemini sağlarlar. Yani merkezler bir doğru üzerindedir.

78

90

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 6

91

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

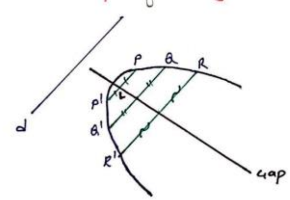
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

KONİKLERDE ÇAP (KÖŞEGEN)

$\Phi(x,y)=0$ koniği ve d doğrusu verilsin. Koniğin d doğrusuna paralel olan kirişlerinin orta noktalarının geometrik yerine koniğin eşlenik çapı veya köşegeni adı verilir.



Koniklerde Çapın Bulunması

$\phi(x,y)=0$ koniği ve $d \ldots y=mx+n$ doğrusu verilsin. Çapa ait nokta $L(x_0,y_0)$ olsun. L den geçen ve d doğrusuna paralel olan kirişin denklemi $y-y_0=m(x-x_0)$ olur. Kiriş ile koniğin ortak noktaları olan $P(x_1,y_1)$ ve $P'(x_2,y_2)$ noktalarını bulmak için kiriş ve konik denklemi ortak çözülür:

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (Cm^2+Bm+A)x^2+(By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+mE+D)x + Cy_0^2+Cm^2x_0^2+Ey_0-mEx_0+F=0$$

bulunur. Bu denklemin kökleri P ve P' nün apsislerini yani x_1 ve x_2 yi verir.

80

L, PP' nün orta noktası olacağından,

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\Rightarrow x_0=-\frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_0=-\frac{By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+mE+D}{2(Cm^2+Bm+A)}$$

Bu denklem düzenlenirse

$$(2A+mB)x_0+(B+2mC)y_0+mE+D=0 \quad \ldots (*)$$

bulunur. Bu x_0 ve y_0 a göre 1. dereceden bir denklem olup bir doğru belirtir. O halde çap bir doğrudur. Denklem düzenlenirse

$$2Ax_0+By_0+D+m(Bx_0+2Cy_0+E)=0 \quad \ldots (**)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_x|_L+m\phi_y|_L=0} \rightarrow \text{çapın denklemi}$$

elde edilir.

81

Not: $\phi_x|_L+m\phi_y|_L=0$ çap denklemindeki m nin çapın eğimi olmadığına, çapı bulmada kullanılan d doğrusunun eğimi olduğuna dikkat ediniz.

Çapın Eğimi ile d Doğrusunun Eğimi Arasındaki Bağıntı

$$(2A+mB)x_0+(B+2mC)y_0+mE+D=0 \ldots (*)$$

çap denkleminden

$$y_0=-\frac{2A+mB}{B+2mC}x_0-\frac{mE+D}{B+2mC}$$

yazılabilir. O halde çapın eğimi m' olmak üzere

$$m'=-\frac{2A+mB}{B+2mC} \quad \text{dir.}$$

$$\boxed{(m+m')B+2Cmm'+2A=0}$$ çapın eğimi ile d doğrusunun eğimi arasındaki bağıntı.

bulunur. Eğimleri m ve m' olan doğrultulara **eşlenik doğrultular** denir.

82

Teorem: Merkezli koniklerde bütün çaplar merkezden geçer. Tersine, merkezden geçen her doğru çaptır.

İspat:

($\Rightarrow$) $\phi(x,y)=0$ koniği ve bu koniğin $\phi_x|_L+m\phi_y|_L=0$ çapı verilsin. $M(x_0,y_0)$ noktası koniğin merkezi olmak üzere

$$\phi_x|_M=0 \text{ ve } \phi_y|_M=0$$

$$\Rightarrow \phi_x|_M+m\phi_y|_M=0 \text{ olur.}$$

Bu ise M noktasının çap denklemini sağlaması demektir. O halde bütün çaplar merkezden geçer.

($\Leftarrow$) $M(x_0,y_0)$ merkezinden geçen her doğrunun çap olduğunu gösterelim. M merkez olduğundan $\phi_x|_M=0$ ve $\phi_y|_M=0$ dır.

83

$\Phi_x|_M = 0 \Rightarrow 2Ax_0 + By_0 + C = 0$, $\Phi_y|_M = 0 \Rightarrow Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0$
bulunur. O halde

$$d_1 \ldots 2Ax + By + C = 0$$
$$d_2 \ldots Bx + 2Cy + E = 0$$

doğrularını alırsak, d_1 ve d_2 M den geçen iki doğrudur.
O halde M dan geçen tüm doğruların (doğru demetinin) denklemi

$$\lambda_1(2Ax + By + C) + \lambda_2(Bx + 2Cy + E) = 0$$

$M \in d_1$ ve $M \in d_2$ olduğundan,

$$\lambda_1(2Ax_0 + By_0 + C) + \lambda_2(Bx_0 + 2Cy_0 + E) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \Phi_x|_M + \lambda_2 \Phi_y|_M = 0$$

$\lambda_1 \neq 0$ için $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = m$ alınırsa $\Phi_x|_M + m\Phi_y|_M = 0$ bulunur.

Bu son denklem M den geçen doğru denklemidir. Aynı zamanda çaptır.
O halde, merkezden geçen her doğru çaptır

84

Örnek: $4x^2 - 10xy + 4y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$ koniği veriliyor.

a) $m = 3$ doğrultusuna eşlenik çapını bulunuz.

b) $x - y + 3 = 0$ doğrusuna paralel çapını bulunuz.

c) $2x - y + 3 = 0$ doğrusuna dik çapını bulunuz.

d) Orta noktası $P(-1,1)$ olan kirişin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\Phi_x = 8x - 10y - 4 \ , \ \Phi_y = -10x + 8y - 4$$

a) $\Phi_x + m\Phi_y = 0 \Rightarrow (8x - 10y - 4) + 3(-10x + 8y - 4) = 0 \Rightarrow 11x - 7y + 8 = 0$

b) $x - y + 3 = 0$ doğrusunun eğimi 1 dir. O halde çapın eğimi de $m' = 1$ olur. m ile m' arasındaki bağıntı,

$$(m + m')B + 2Cmm' + 2A = 0$$
$$\Rightarrow (m+1)(-10) + 2.4.m + 2.4 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$\Phi_x + m\Phi_y = 0 \Rightarrow x - y = 0$ olur.

85

c) $2x - y + 3 = 0$ doğrusuna dik çapının denklemini bulalım:
$2x - y + 3 = 0$ doğrusunun eğimi 2 olup çapın eğimi $m' = -\frac{1}{2}$ dir.

$$(m + m')B + 2Cmm' + 2A = 0$$
$$\Rightarrow (m - \tfrac{1}{2}).(-10) + 2.4.(-\tfrac{1}{2})m + 2.4 = 0 \Rightarrow m = \frac{13}{14}$$
$$\Rightarrow \Phi_x + m\Phi_y = 0 \Rightarrow (8x - 10y - 4) + \frac{13}{14}(-10x + 8y - 4) = 0$$
$$\Rightarrow x + 2y + 6 = 0 \text{ bulunur.}$$

d) Orta noktası $P(-1,1)$ olan kirişin denklemini bulalım.

Çap denklemi $\Phi_x + m\Phi_y = 0$

$$\Rightarrow (8x - 10y - 4) + m(-10x + 8y - 4) = 0$$

P, çapın üzerinde olacağından denklemi sağlar.

$$\Rightarrow m = \frac{11}{7}$$

O halde kirişin denklemi, $y - 1 = \frac{11}{7}(x+1) \Rightarrow 11x - 7y + 18 = 0$ olur.

86

Örnek: $x^2 + 3xy - y^2 + 5x - 1 = 0$ koniğinin $P(2,3)$ noktasından geçen çapının denklemini bulunuz.

Çözüm:

$4AC - B^2 = -13 < 0$ olup konik hiperboldür. O halde merkeze sahiptir. Koniğin merkezini bulalım: $(K \neq 0)$

$$\Phi_x|_M = 0 \Rightarrow 2x_0 + 3y_0 + 5 = 0$$
$$\Phi_x|_M = 0 \Rightarrow 3x_0 - 2y_0 = 0 \qquad \Rightarrow x_0 = -\frac{10}{13} \ , \ y_0 = -\frac{15}{13}$$

$\Rightarrow M(-\frac{10}{13}, -\frac{15}{13})$ olur. Çap merkezden geçeceğinden M ve P den geçen doğrunun denklemi çapın denklemi olacaktır.

$$\Rightarrow 3x - 2y = 0 \text{ bulunur.}$$

II. yol:

Koniğin merkezi $M(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$\Phi_x|_M = 0 \Rightarrow 2x_0 + 3y_0 - 5 = 0$$

$$\Phi_y|_M = 0 \Rightarrow 3x_0 - 2y_0 = 0$$

olur. O halde M merkezinden geçen iki doğru

$d_1 \dots 2x + 3y - 5 = 0$, $d_2 \dots 3x - 2y = 0$ dır.

M den geçen tüm doğruların denklemi,

$$\lambda_1(2x + 3y - 5) + \lambda_2(3x - 2y) = 0$$

Bu doğrulardan $P(2,3)$ den geçeni arıyoruz.

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow 3x - 2y = 0$ bulunur.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8

KONİKLERDE EKSEN

Koniğin eşlenik doğrultularından dik olan doğrultularına koniğin **asal doğrultuları** denir. Asal doğrultularının eşlenik çapına da koniğin **ekseni** adı verilir.

Asal Doğrultuları Veren Bağıntı:

Eşlenik doğrultular arasında

$$2Cmm' + B(m + m') + 2A = 0$$

bağıntısının var olduğunu biliyoruz. Asal doğrultu tanımından $mm' = -1$ olup $m' = -1/m$ olur. Yukarıdaki eşitlikten

$$\boxed{Bm^2 + 2(A - C)m - B = 0}$$ (Asal doğrultuları veren bağıntı.)

bulunur.

$Bm^2+2(A-C)m-B=0$ denkleminin kökleri

$$m_{1,2}=\frac{(C-A)\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{B} \text{ dir.}$$

1) $B\neq 0$ ise iki asal doğrultu vardır. Yani koniğin iki ekseni vardır.

2) $B=0$ olsun.

a) $A=C$ ise $Bm^2+2(A-C)m-B=0$ denklemi $\forall m\in\mathbb{R}$ için sağlanır. O halde çemberdeki her doğrultu asal doğrultudur. Çemberin sonsuz sayıda ekseni vardır.

b) $A\neq C$ ise $2(A-C)m=0$ dan $m_1=0$ bulunur. Diğer doğrultu buna dik olacağından m_2 doğrultusunun eğim açısı $\frac{\pi}{2}$ dir. $(m_2=\infty)$

$m_1=0$ için eksen, $\phi_x+m\phi_y=0$ dan $\phi_x=0$ dır.

$m_2=\infty$ için eksen, $\lambda_1\phi_x+\lambda_2\phi_y=0$ denkleminde bu durum $\lambda_1=0$ olması durumudur. Bu durumda eksen $\phi_y=0$ dır.

3) Konik parabol olsun. Bu durumda $4AC-B^2=0$ dır.

$$m_{1,2}=\frac{(C-A)\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{B} \text{ den } m_1=\frac{2C}{B},\ m_2=-\frac{2A}{B} \text{ elde edilir.}$$

Şimdi bu asal doğrultular için eksen denklemlerini yazalım:

$$\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$m_1=\frac{2C}{B}$ için $\phi_x+m_1\phi_y=0$ dan

$$2(A+C)x+\left(B+\frac{4C^2}{B}\right)y+D+\frac{2EC}{B}=0$$

eksen denklemi bulunur.

$m_2=-\frac{2A}{B}$ için $\phi_x+m_2\phi_y=0$ dan

$$\overbrace{\left(\frac{B^2-4AC}{B}\right)}^{0}y+D-\frac{2AE}{B}=0 \Rightarrow \text{eksen yoktur.}$$

O halde parabolde tek eksen vardır.

Örnek: $x^2-xy+y^2-3=0$ koniğinin eksenlerini bulunuz.

Çözüm: Önce asal doğrultuları bulalım:

$$Bm^2+2(A-C)m-B=0 \text{ dan } m=\mp 1 \text{ bulunur.}$$

$m=1$ için eksen: $\phi_x+1\phi_y=0$ dan $x+y=0$

$m=-1$ için eksen: $\phi_x+(-1)\phi_y=0$ dan $x-y=0$ bulunur.

Örnek: $x^2+2xy+y^2-x+3=0$ koniğinin eksenlerini bulunuz.

Çözüm: $4AC-B^2=0$ olup konik paraboldür.

Önce asal doğrultuları bulalım:

$$Bm^2+2(A-C)m-B=0 \text{ dan } m=\mp 1 \text{ dir.}$$

$m=1$ için $\phi_x+1.\phi_y=0 \Rightarrow 2x+2y-1+2x+2y=0 \Rightarrow 4x+4y-1=0$

$m=-1$ için $\phi_x+(-1)\phi_y=0 \Rightarrow 2x+2y-1-2x-2y=0 \Rightarrow -1=0$

O halde tek eksen $4x+4y-1=0$ dır.

Örnek: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin eksenlerini bulunuz. $(a\neq b)$

Çözüm: $Bm^2+2(A-C)m-B=0$ dan $2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)m=0$

$\Rightarrow m=0$ olur.

O halde asal doğrultular $m_1=0$ ve $m_2=\infty$ olur.

$m_1=0$ için eksen $\phi_x=0 \Rightarrow x=0$

$m_2=\infty$ için eksen $\phi_y=0 \Rightarrow y=0$ dır.

Örnek: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünün eksenlerini bulunuz. $(x=0, y=0)$

Örnek: $y=ax^2$ parabolünün eksenlerini bulunuz.

Çözüm:

$$Bm^2+2(A-C)m-B=0 \text{ dan } m=0$$

O halde asal doğrultular $m=0$ ve $m=\infty$ olur.

$m=0$ için eksen $\phi_x=0 \Rightarrow x=0$, $m=\infty$ için eksen $\phi_y=0 \Rightarrow -1=0$

Örnek: $x^2+xy+y^2+x-1=0$ koniğinin eksenlerini bulunuz.

94

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

110

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 8

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

111

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

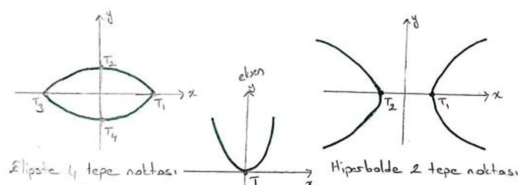
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

KONİKLERDE KÖŞE (TEPE) NOKTALARI

Bir koniğin eksenleri ile arakesit noktalarına koniğin tepe veya köşe noktaları denir. O halde bu noktaları bulmak için konik denklemi ile eksen denklemleri ortak çözülmelidir.



Elipste 4 tepe noktası vardır.

Parabolde tek tepe noktası vardır.

Hiperbolde 2 tepe noktası vardır.

95

Örnek: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğinin tepe noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$Bm^2+2(A-C)m-B=0$ dan $m=\mp 1$ asal doğrultulardır.

$m_1=1$ için eksen $\phi_x+1\phi_y=0$ dan $x+y=0$

$m_2=-1$ için eksen $\phi_x+(-1)\phi_y=0$ dan $x-y-2=0$ bulunur.

Koniğin reel elips olduğuna yani 4 tane tepe noktası bulmamız gerektiğine dikkat ediniz.

$$\begin{cases} 5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_1=1+\sqrt{2}, \quad x_2=1-\sqrt{2} \text{ olur.}$$

$x_1=1+\sqrt{2}$ için $y_1=-1-\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$ için $y_2=-1+\sqrt{2}$ olur.

$\Rightarrow T_1(1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2})$, $T_2(1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ bulunur.

$$\begin{cases} 5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2y^2+4y+1=0 \Rightarrow y_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olur.}$$

$y_1=-1+\sqrt{2}/2$ için $x_1=1+\sqrt{2}/2$, $y_2=-1-\sqrt{2}/2$ için $x_2=1-\sqrt{2}/2$ bulunur.

$\Rightarrow T_3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $T_4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olur.

Örnek:

$9x^2-24xy+16y^2-200x-150y=0$ koniğinin tepe noktalarını bulunuz.

Çözüm: $4AC-B^2=0$ olup konik paraboldür.

$Bm^2+2(A-C)m-B=0$ dan $m_1=-\frac{4}{3}$, $m_2=\frac{3}{4}$ asal doğrultulardır.

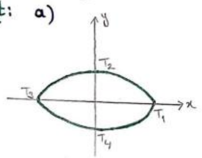
$m_1=-\frac{4}{3}$ için eksen $\phi_x+(-\frac{4}{3})\phi_y=0$ dan $3x-4y=0$

$m_2=\frac{3}{4}$ için eksen yoktur.

$$\begin{cases} 9x^2-24xy+16y^2-200x-150y=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ bulunur.}$$

$x=0$ için $y=0$ dır. O halde tepe noktası $T(0,0)$ olur.

Not: **a)**



Elipsin tepe noktaları T_1, T_2, T_3, T_4 olsun. $\|T_1T_3\|$ ve $\|T_2T_4\|$ uzunluklarına elipsin eksen uzunlukları denir. Eksen uzunluğu büyük olana asal eksen, diğerine de yedek eksen adı verilir.

Kısaca; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi için

$a>b \Rightarrow$ x ekseni asal, y ekseni yedek eksen

$a<b \Rightarrow$ y ekseni asal, x ekseni yedek eksendir.

b) Konik hiperbol ise tepe noktalarını üzerinde bulunduran eksene asal eksen, diğerine de yedek eksen denir.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünde x ekseni asal, y ekseni yedek eksendir.

$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünde y ekseni asal, x ekseni yedek eksendir.

c) $y=ax^2$ parabolünde y ekseni asal eksendir.

$x=by^2$ parabolünde x ekseni asal eksendir.

KONİKLERDE ASİMPTOT

Bir koniğin eşlenik doğrultusu ile aynı doğrultuya sahip doğrultularına koniğin asimptotik doğrultuları denir. Koniğin asimptotik doğrultusuna göre çap denklemine de koniğin asimptotu denir. Şimdi asimptotik doğrultuları veren bağıntıyı bulalım: Eşlenik doğrultular arasında

$$2Cmm' + B(m+m') + 2A = 0$$

bağıntısının olduğunu biliyoruz. Asimptotik doğrultu tanımından $m = m'$ olacağından

$$\boxed{Cm^2 + Bm + A = 0}$$ (Asimptotik doğrultuları veren bağıntı)

bulunur. Bu denklemin kökleri m_1 ve m_2 olmak üzere koniğin asimptotları $\phi_x + m_1\phi_y = 0$ ve $\phi_x + m_2\phi_y = 0$ dır.

İrdeleme: $Cm^2 + Bm + A = 0$ denkleminin kökleri için

$$m_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

olur.

1) Konik elips ise $4AC - B^2 > 0$ olup $B^2 - 4AC < 0$ olacağından denklemin reel kökü yoktur. Yani elipste asimptot yoktur.
2) Konik hiperbol ise $4AC - B^2 < 0$ olup $B^2 - 4AC > 0$ olacağından denklemin iki reel kökü vardır. Yani hiperbolde iki asimptot vardır.
3) Konik parabol ise $4AC - B^2 = 0$ olup denklemin çakışık tek kökü vardır. O halde parabolün tek asimptotu vardır. Bu asimptotun doğrultusu sonsuz olup parabolün ekseni ile çakışır.

Örnek: $2x^2 + xy - 3y^2 + y - 1 = 0$ koniğinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$Cm^2 + Bm + A = 0$ dan $3m^2 - m - 2 = 0$

$\Rightarrow m_1 = 1 \;,\; m_2 = -\frac{2}{3}$

$m_1 = 1$ için $\phi_x + 1\phi_y = 0$ dan asimptot $5x - 5y + 1 = 0$ bulunur.

$m = -2/3$ için $\phi_x + (-\frac{2}{3})\phi_y = 0$ dan asimptot $10x + 15y - 2 = 0$ bulunur.

Örnek:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün asimptotlarının $y = \mp \frac{b}{a}x$

olduğunu gösteriniz.

Örnek: $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$ koniğinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$4AC - B^2 = 0$ olup konik paraboldür.

$Cm^2 + Bm + A = 0$ dan $(m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$ bulunur.

$\phi_x + 2\phi_y = 0$ dan

$8x - 4y - 8 + 2(-4x + 2y - 8) = 0$

$\Rightarrow \quad -24 = 0$

$\Rightarrow$ Asimptot yoktur.

Örnek: $3x^2-10xy+3y^2+x-3y-4=0$ koniğini merkezil hale getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=-64$ olup konik hiperboldür.

Koniğe önce öteleme işlemi uygulayalım: $O'(h,k)$ olmak üzere,

$\phi_x|_{O'}=0,\ \phi_y|_{O'}=0$ dan $\begin{matrix} 6h-10k+1=0 \\ -10h+6k-3=0 \end{matrix} \Rightarrow h=-\frac{3}{8},\ k=-\frac{1}{8}$

bulunur. O halde koniğin $x'O'y'$ deki denklemi,

$F'=\phi(h,k)=\phi\left(-\frac{3}{8},-\frac{1}{8}\right)=-4$ olmak üzere,

$3x'^2-10x'y'+3y'^2-4=0$ dır.

Şimdi de dönme işlemi uygulayalım:

$\tan 2\alpha=\frac{-10}{3-3}=-\frac{10}{0} \Rightarrow 2\alpha=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{4}$ olur.

104

O halde dönme denklemleri,

$\begin{cases} x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha \\ y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha \end{cases}$ ve $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ olmak üzere,

$\begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'') \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'') \end{cases}$ olur. Bu denklemler

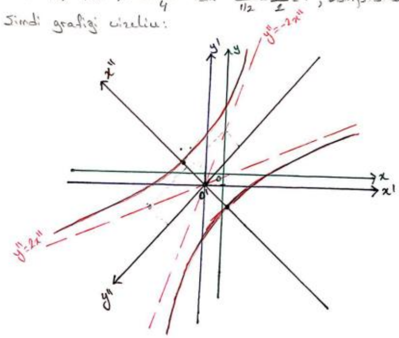
$3x'^2-10x'y'+3y'^2-4=0$ da yerine yazılırsa koniğin $x''O'y''$ deki denklemi $\frac{x''^2}{1/2}-\frac{y''^2}{2}=1$ bulunur.

Merkezil hiperbolün asimptotları $y=\mp\frac{b}{a}x$ olduğundan asimptotları $y''=\mp 2x''$ olur.

105

$O'(-3/8,-1/8)$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ idi. $\frac{x''^2}{1/2}-\frac{y''^2}{2}=1$, asimptotlar $y''=\mp 2x''$

Şimdi grafiği çizelim:



106

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

125

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

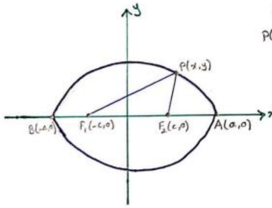
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10

KONİKLERDE ODAK VE DOĞRULTMAN

Merkezil Elipste Odak ve Doğrultman

Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine **elips**, bu sabit noktalara da elipsin **odakları** adı verilir. Şimdi, odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan elipsin denklemini bulalım:



Elips üzerinde herhangi bir $P(x,y)$ noktasını alalım. Tanımdan,

$\|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = 2a = \text{sabit}$

($P=A$ alınırsa,

$\|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = a+c+a-c = 2a$)

$\|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = 2a$, $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$

$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$

$\Rightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$

$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$

$a>c$ olduğundan $a^2>c^2$ olur. $a^2-c^2=b^2$ alınırsa

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elde edilir.

Şimdi elipste doğrultman kavramını ele alalım:

$P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ idi.

$\Rightarrow \|\vec{PF_1}\|^2 = (x+c)^2+y^2$, $\|\vec{PF_2}\|^2 = (x-c)^2+y^2$

$\Rightarrow \|\vec{PF_1}\|^2 - \|\vec{PF_2}\|^2 = 4cx$

$\Rightarrow \left(\|\vec{PF_1}\| - \|\vec{PF_2}\|\right)\underbrace{\left(\|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\|\right)}_{2a} = 4cx$

$\Rightarrow \|\vec{PF_1}\| - \|\vec{PF_2}\| = 2\dfrac{c}{a}x$

$\|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| = 2a$

sistemi çözülürse $\|\vec{PF_1}\| = \dfrac{c}{a}\left(x + \dfrac{a^2}{c}\right)$, $\|\vec{PF_2}\| = \dfrac{c}{a}\left(-x + \dfrac{a^2}{c}\right)$ bulunur.

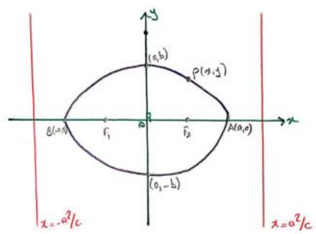
$d_1 \ldots \; x + \dfrac{a^2}{c} = 0$

ve

$d_2 \ldots \; -x + \dfrac{a^2}{c} = 0$ doğrularını alalım.

$d_1 \dots\ x + \frac{a^2}{c} = 0\ ,\quad d_2 \dots\ -x + \frac{a^2}{c} = 0$

$a > c \Rightarrow a^2 > ac \Rightarrow \frac{a^2}{c} > a$ dır.



$d_1 \dots\ x + \frac{a^2}{c} = 0,\quad d_2 \dots\ -x + \frac{a^2}{c} = 0$ idi.

$P(x,y)$ nin d_1 e olan uzaklığı;

$$l_1 = \frac{|x + a^2/c|}{1}$$

$\|\overrightarrow{PF_1}\| = \frac{c}{a}(x + a^2/c)$ idi

Şimdi, P nin F_1 e olan uzaklığının d_1 e olan uzaklığına oranını bulalım:

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_1}\|}{l_1} = \frac{\frac{c}{a}(x + a^2/c)}{|x + a^2/c|} = \frac{c}{a}$$ (uzaklıklar oranı pozitif olmalı)

Benzer şekilde; P nin d_2 ye olan uzaklığı

$$l_2 = \frac{|-x + a^2/c|}{1}$$

$\|\overrightarrow{PF_2}\| = \frac{c}{a}(-x + a^2/c)$ idi.

Şimdi, P nin F_2 ye olan uzaklığının d_2 ye olan uzaklığına oranını bulalım;

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_2}\|}{l_2} = \frac{\frac{c}{a}(-x + a^2/c)}{|-x + a^2/c|} = \frac{c}{a}$$ olur.

Sonuç: Elips üzerindeki bir $P(x,y)$ noktasının F_1 ve F_2 odaklarına olan uzaklığının, P nin d_1 ve d_2 doğrularına uzaklıkları oranı sabittir. O halde elips, sabit iki noktaya ve sabit iki doğruya uzaklıkları oranı sabit olan P noktalarının geometrik yeridir. Bu sabit iki noktaya **odaklar**, sabit iki doğruya **doğrultmanlar**, sabit $e = \frac{c}{a}$ oranına da elipsin **dış merkezliği** denir.

O halde,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi için $a^2 - b^2 = c^2$ olmak üzere odaklar $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ dır.

F_1 e karşılık gelen doğrultman doğrusu $x = -a^2/c$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman doğrusu $x = a^2/c$,

Dış merkezlik ise $e = \frac{c}{a}$ dır. $c < a$ olduğundan elips için $e < 1$ dir.

Not: $a^2 = b^2 + c^2$ olup $a > b$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsinin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$$a^2 = 25\ ,\ b^2 = 9\ ,\quad a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow c = \mp 4$$

Odaklar $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, dış merkezlik $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$

F_1 e karşılık gelen doğrultman $x = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow x = -\frac{25}{4}$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman $x = a^2/c \Rightarrow x = \frac{25}{4}$ olur.

Örnek: Bir odağı $(5,0)$, bu odağa karşılık gelen doğrultmanı $x=\frac{13}{2}$ ve dış merkezliği de $e=\frac{2}{3}$ olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$F_1(5,0)$, $d_1 \ldots\ x-\frac{13}{2}=0$, $e=\frac{2}{3}$ olur.

Elips üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y)$ olsun. P nin d_1 e olan uzaklığı l_1 olarak üzere tanımdan,

$$\frac{\|\vec{PF_1}\|}{l_1}=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{13}{2}\right|}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 5x^2+9y^2-38x+56=0$ bulunur.

Örnek: Bir odağı $F(-2,3)$, bu odağa karşılık gelen doğrultmanı $d \ldots\ x+2y+4=0$ ve dış merkezliği $e=\frac{1}{2}$ olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Elips üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y)$ olsun.

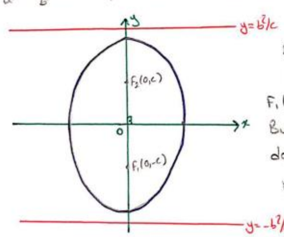
P nin d ye olan uzaklığı l olmak üzere tanımdan,

$$\frac{\|\vec{PF}\|}{l}=e=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\frac{|x+2y+4|}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 19x^2+16y^2-4xy+72x-136y+244=0$ bulunur.

NOT: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi için $b>a$ ise odaklar y ekseni üzerinde olur.



Bu durumda, $b^2-a^2=c^2$ olup odaklar $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ dir. Bunlara karşılık gelen doğrultmanlar ise $y=-b^2/c$ ve $y=b^2/c$ dir. Elipsin dış merkezliği $e=\frac{c}{b}<1$ olur.

*Diğer ifadede x ile y ve a ile b nin rol değiştirmiş şekli buradaki formülleri vermektedir.

116

Örnek: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ elipsinin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$a^2=16$, $b^2=25$ $(a<b)$

$b^2-a^2=c^2 \Rightarrow c=\mp 3$ olup odaklar $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ olur.

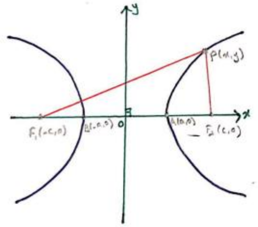
F_1 e karşılık gelen doğrultman $y=-\frac{b^2}{c} \Rightarrow y=-\frac{25}{3}$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman $y=\frac{b^2}{c} \Rightarrow y=\frac{25}{3}$

Dış merkezlik $e=\frac{c}{b}=\frac{3}{5}<1$ bulunur.

Merkezil Hiperbolde Odak ve Doğrultman

Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları farkı sabit olan noktaların geometrik yerine **hiperbol**, bu sabit noktalara da hiperbolün **odakları** adı verilir. Şimdi, $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan hiperbolün denklemini bulalım:



Hiperbol üzerinde herhangi bir $P(x,y)$ noktasını alalım. Tanımdan,

$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a = \text{sabit}$

($P = A$ alınırsa

$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = a + c - (c-a) = 2a$)

118

$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$, $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2xc + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2xc + \cancel{y^2}$

$\Rightarrow 4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2c^2 + a^4 - 2\cancel{x}ca^2 = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2$

$\Rightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$

$c > a$ olduğundan $c^2 > a^2$ olur $c^2 - a^2 = b^2$ alınırsa

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elde edilir.

119

Şimdi hiperbolde doğrultman kavramını ele alalım:

$P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ idi.

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\|^2 = (x+c)^2 + y^2$, $\|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = (x-c)^2 + y^2$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\|^2 - \|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = 4cx$

$\Rightarrow \underbrace{(\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\|)}_{2a}(\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\|) = 4cx$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2\dfrac{c}{a}x$

$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$

sistemi çözülürse $\|\overrightarrow{PF_1}\| = \dfrac{c}{a}\left(x + \dfrac{a^2}{c}\right)$, $\|\overrightarrow{PF_2}\| = \dfrac{c}{a}\left(-x + \dfrac{a^2}{c}\right)$ bulunur.

$d_1 \ldots\; x + \dfrac{a^2}{c} = 0$

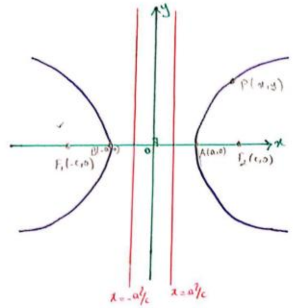
ve

$d_2 \ldots\; -x + \dfrac{a^2}{c} = 0$ doğrularını alalım.

120

$d_1 \ldots\; x + \dfrac{a^2}{c} = 0$, $d_2 \ldots\; -x + \dfrac{a^2}{c} = 0$

$a < c \Rightarrow a^2 < ac \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} < a$ dır.



121

$d_1 \ldots\ x+\frac{a^2}{c}=0$, $d_2 \ldots\ -x+\frac{a^2}{c}=0$ idi.

$P(x,y)$ nin d_1 e olan uzaklığı,

$$\ell_1 = \frac{|x+a^2/c|}{1}$$

$\|\vec{PF_1}\| = \frac{c}{a}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)$ idi.

Şimdi P nin F_1 e olan uzaklığının d_1 e olan uzaklığına oranını bulalım:

$$\frac{\|\vec{PF_1}\|}{\ell_1} = \frac{\frac{c}{a}(x+a^2/c)}{|x+a^2/c|} = \frac{c}{a} \text{ (uzaklıklar oranı pozitif olmalı)}$$

Benzer şekilde; P nin d_2 ye olan uzaklığı $\ell_2 = \frac{|-x+a^2/c|}{1}$

$\|\vec{PF_2}\| = \frac{c}{a}\left(-x+\frac{a^2}{c}\right)$ idi.

Şimdi, P nin F_2 ye olan uzaklığının d_2 ye olan uzaklığına oranını bulalım:

$$\frac{\|\vec{PF_2}\|}{\ell_2} = \frac{\frac{c}{a}(-x+a^2/c)}{|-x+a^2/c|} = \frac{c}{a} \text{ olur.}$$

Sonuç: Hiperbol üzerindeki bir $P(x,y)$ noktasının F_1 ve F_2 odaklarına olan uzaklığının, P nin d_1 ve d_2 doğrularına uzaklıkları oranı sabittir. O halde hiperbol, sabit iki noktaya ve sabit iki doğruya uzaklıkları oranı sabit olan P noktalarının geometrik yeridir. Bu sabit iki noktaya **odaklar**, sabit iki doğruya **doğrultmanlar**, sabit $e=\frac{c}{a}$ oranına da hiperbolün **dış merkezliği** denir. O halde,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolü için $a^2+b^2=c^2$ olmak üzere odaklar $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ dır.

F_1 e karşılık gelen doğrultmanın doğrusu $x=-a^2/c$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman doğrusu $x=a^2/c$,

Dış merkezlik ise $e=\frac{c}{a}$ dır. $c>a$ olduğundan hiperbol için $e>1$ dir.

Örnek: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ hiperbolünün odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

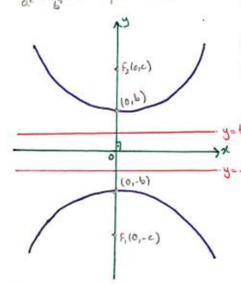
$a^2=9$, $b^2=25$, $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow c=\mp 5$

Odaklar $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$, dış merkezlik $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}>1$

F_1 e karşılık gelen doğrultman $x=-\frac{a^2}{c} \Rightarrow x=-\frac{9}{5}$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman $x=\frac{a^2}{c} \Rightarrow x=\frac{9}{5}$ olur.

NOT: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünde odaklar y ekseni üzerindedir.

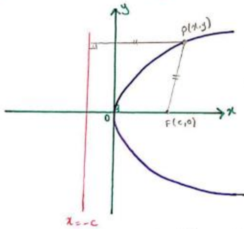


Bu durumda $b^2+a^2=c^2$ olup odaklar $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ dir. Bunlara karşılık gelen doğrultmanlar ise $y=-b^2/c$ ve $y=b^2/c$ olur. Hiperbolün dış merkezliği ise $e=\frac{c}{b}>1$ dir.

* Diğer ifadede x ile y ve a ile b nin rol değiştirmiş şekli buradaki formülleri vermektedir.

Merkezil Parabolde Odak ve Doğrultman

Sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine **parabol**, sabit noktaya parabolün **odağı**, sabit doğruya da **doğrultmanı** adı verilir.



Odağı $F(c,0)$ ve doğrultmanı $x=-c$ olan parabolün denklemini bulalım: P nin d ye olan uzaklığı $\ell = |x+c|$,

$$\|\vec{PF}\| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\|\vec{PF}\| = \ell$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = |x+c|$$

$$\Rightarrow y^2 = 4cx \text{ bulunur.}$$

* Parabol için dış merkezlik $e=1$ dir.

126

Örnek: $y^2=2x$ parabolünün odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$y^2=4cx$ ile karşılaştırılırsa $c=\frac{1}{2}$ olup $F(\frac{1}{2},0)$ olup doğrultman $x=-1/2$ olur.

Not: $x^2=by$ parabolünün odağı $F(0,\frac{b}{4})$, doğrultmanı $y=-\frac{b}{4}$ olur.

SONUÇ: Elips, hiperbol ve parabol için elde edilen sonuçlar göz önüne alınırsa, aşağıdaki ortak sonuç elde edilir:

Düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yerine **konik** denir. Sabit noktaya koniğin **odağı**, sabit doğruya **doğrultman**, sabit e oranına da **dış merkezliği** adı verilir.

$e<1$ ise konik elips sınıfından,
$e>1$ ise konik hiperbol sınıfından,
$e=1$ ise konik parabol sınıfındandır.

148

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 10

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

149

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11

KONİKLERDE TEĞET

Bir Konik ile Bir Doğrunun Konumu

$\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemli M koniği ve $y=mx+n$ denklemli d doğrusu verilsin. M koniği ile d doğrusunun konumunu araştırmak demek, doğru ve konik denklemlerinin oluşturduğu sistemi ortak çözmek demektir:

$$Ax^2+Bx(mx+n)+C(mx+n)^2+Dx+E(mx+n)+F=0$$

$$\Rightarrow (Cm^2+Bm+A)x^2+(Bn+2mC+mE+D)x+Cn^2+En+F=0$$

olur. x e göre 2. dereceden olan bu denklemin diskriminantı δ olmak üzere,

1) $\delta>0$ ise denklemin iki reel kökü vardır. Yani d doğrusu M koniğini iki noktada keser.

2) $\delta=0$ ise denklemin tek kökü vardır. O halde d doğrusu M koniğini tek noktada keser. Yani d doğrusu M koniğine teğettir.

3) $\delta<0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Yani doğru koniği kesmez.

129

Örnek: $x^2-xy+y^2+2x-y=0$ koniği ile $y=2x+1$ doğrusunun birbirine göre durumunu araştırınız.

Çözüm:

$y=2x+1$ ifadesi konik denkleminde yerine yazılırsa,

$$x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2+2x-2x-1=0$$

$$\Rightarrow x^2-x=0 \text{ bulunur.}$$

$\delta=1>0$ olup doğru koniği iki noktada keser.

$$x^2-x=0 \text{ dan } x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$$

$\Rightarrow$ Doğru koniği $P(0,1)$ ve $Q(1,3)$ noktalarında keser.

130

Koniğe Bir Noktadan Çizilen Teğetin Denkleminin Bulunması

$\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemli M koniği ve bir $P(x_1,y_1)$ noktası verilsin. P den geçen doğrular

$$d\ldots\quad y-y_1=m(x-x_1)$$

şeklindedir. Şimdi M ile d doğrularının oluşturduğu sistemi çözelim:

$$Ax^2+Bx(m(x-x_1)+y_1)+C(m(x-x_1)+y_1)^2+Dx+E(m(x-x_1)+y_1)+F=0$$

$\Rightarrow ax^2+bx+c=0$ şeklinde bir denklem elde edilir.

$\delta=b^2-4ac$ olmak üzere, $\delta=0$ ise doğru koniğe teğettir. $\delta=0$ denkleminde bilinmeyen m dir.

a) $\delta=0$ için $m_1\neq m_2$ ise P noktasından koniğe iki teğet çizilebilir.

b) $\delta=0$ için $m_1=m_2$ ise P den koniğe bir tek teğet çizilebilir. P noktası koniğin üzerindedir.

c) $\delta=0$ için m değeri yoksa P den koniğe teğet çizilemez. P noktası koniğin içindedir.

131

Örnek: $x^2+4xy+4y^2+2x+1=0$ koniğine $P(-1,0)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemini bulunuz.

Çözüm:

P den geçen doğrular

$$d \ldots \quad y=m(x+1)$$

şeklindedir. Ortak çözüm yapılırsa,

$$x^2+4xm(x+1)+4m^2(x+1)^2+2x+1=0$$

$$\Rightarrow (4m^2+4m+1)x^2+(8m^2+4m+2)x+4m^2+1=0$$

Teğet olması için doğru ile koniğin tek ortak noktası olmalıdır.

$$\Rightarrow \delta=(8m^2+4m+2)^2-4(4m^2+4m+1)(4m^2+1)=0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow 4m^2=0 \Rightarrow m=0 \text{ bulunur.}$$

O halde koniğe $P(-1,0)$ dan çizilen teğetin denklemi:

$$y=0 \text{ dır.}$$

132

Örnek: $x^2+xy+4y^2-x-3y+1=0$ koniğine $P(1,0)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemlerini bulunuz.

Çözüm:

P den geçen doğrular

$$d \ldots \quad y=m(x-1)$$

şeklindedir. Bu doğrular içinden koniğe teğet olanları arıyoruz.

Ortak çözüm yapılıp düzenlenirse

$(4m^2+m+1)x^2+(-8m^2-4m-1)x+4m^2+3m+1=0$ bulunur. Teğet olma şartından $\delta=(-8m^2-4m-1)^2-4(4m^2+m+1)(4m^2+3m+1)=0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow 12m^2+8m+3=0$$

bulunur. Bu denklemin kökü olmadığından P noktasından koniğe teğet çizilemez.

133

NOT: $\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ koniğine üzerindeki bir $P(x_1,y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi bulunurken türevin geometrik anlamını da kullanabiliriz:

Teğetin denklemi $y-y_1=m_T(x-x_1)$ şeklinde olup burada,

$$m_T=-\frac{\phi_x}{\phi_y}\Big|_P$$

$$=-\frac{2Ax+By+D}{Bx+2Cy+E}\Big|_P$$

$$=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E} \quad \text{dir.}$$

Örnek: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin $P(x_1,y_1)$ noktasındaki teğetinin denkleminin,

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm:

$$\phi(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad , \quad m_T=-\frac{\phi_x}{\phi_y}\Big|_P=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

$$\Rightarrow \text{Teğet,} \quad y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x+\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1^2}{y_1} \Rightarrow yy_1-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}x_1x+\frac{b^2}{a^2}x_1^2$$

P, elips üzerinde olduğundan, $\frac{x_1^2}{a^2}=1-\frac{y_1^2}{b^2}$ dir.

$$\Rightarrow yy_1-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}x_1x+b^2\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right) \Rightarrow yy_1=-\frac{b^2}{a^2}x_1x+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1 \text{ bulunur.}$$

157

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11

158

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

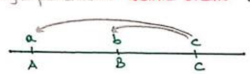
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12

Bölme Oranı

Koniklerde kutup noktası ve kutup doğrusu kavramlarını vermeden önce bazı temel kavramlara ihtiyacımız bulunmaktadır. Bunlardan biri de bölme oranıdır.

Tanım: A, B, C doğrusal üç nokta olsun. $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ oranına C noktasının AB doğru parçasını **bölme oranı** denir. (AB, C) ile gösterilir.

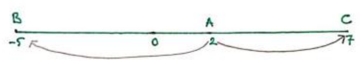


Buna göre, $(AB,C) = \frac{a-c}{b-c}$ dir.

Örnek: $A=(2)$, $B(-5)$, $C(7)$ için $(BC,A)=?$

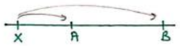
Çözüm:

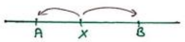
$$(BC,A) = \frac{AB}{AC} = \frac{-5-2}{7-2} = -\frac{7}{5} \quad \text{olur.}$$

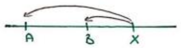


137

NOT: $A=(a)$, $B=(b)$, $X=(x)$ ve $(AB,X)=k$ olsun.

1) X, A nın solunda ise  $0<k<1$ olur.

2) X, A ile B nin arasında ise  $k<0$ dır.

3) X, B nin sağında ise  $k>1$ dir.

$k>0$ ise k ya dıştan bölme oranı,
$k<0$ ise k ya içten bölme oranı adı verilir.

Çifte Oran

A,B,C,D doğrusal 4 nokta olsun. C nin AB doğru parçasını bölme oranının, D nin AB doğru parçasını bölme oranına bölümüne A,B,C,D noktalarının çifte oranı denir. (AB,CD) ile gösterilir.

Buna göre,

$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)}=\frac{\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}}{\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \quad \text{dır.}$$

Örnek: $A=(-1)$, $B=(3)$, $C=(4)$, $D=(2)$ için $(CB,DA)=?$

Çözüm:

$$(CB,DA)=\frac{(CB,D)}{(CB,A)}=\frac{\frac{4-2}{3-2}}{\frac{4-(-1)}{3-(-1)}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$$

Harmonik Oran

A,B,C,D doğrusal 4 nokta olsun. Bu 4 noktanın çifte oranı -1 ise yani $(AB,CD)=-1$ ise bu orana harmonik oran denir.

A,B,C,D noktaları harmonik oran teşkil ediyorsa, C ve D noktaları AB doğru parçasını biri içten diğeri dıştan olmak üzere aynı oranda böler. A ile B ve C ile D ye birbirinin harmonik eşi denir.

Örnek: $A=(1)$, $B=(0)$, $C=(-4)$ ve $(BC,DA)=-1$ ise $D=?$

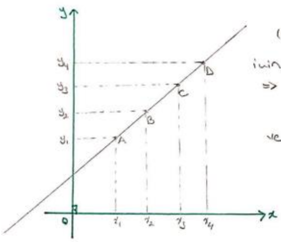
Çözüm:

$D=(d)$ olsun. $(BC,DA)=\dfrac{(BC,D)}{(BC,A)}$

$$=\frac{\frac{0-d}{-4-d}}{\frac{0-1}{-4-1}}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d+4}=-\frac{1}{5} \Rightarrow 5d=-d-4 \Rightarrow d=-2/3$$

NOT: Bu konuda söz konusu olan uzaklık yönlü uzaklıktır. Harmonik oranın 2-boyutlu uzayda karşılığı aşağıda verilmiştir:



$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}=-1$$

için

$$\Rightarrow \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{x_2-x_4}{x_1-x_4}=-1$$

ve

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}\cdot\frac{y_2-y_4}{y_1-y_4}=-1 \quad \text{olur.}$$

NOT: 3-boyutlu uzay içinde benzer durum söz konusudur. Orada bir de z ekseni boyunca yönlü uzaklık söz konusudur.

142

Örnek:

$$d\ldots\begin{cases} x=2+t\\ y=t\\ z=3t+1\end{cases}$$

doğrusu üzerinde $A(2,0,1)$, $B(3,1,4)$ ve $C(1,-1,-2)$ noktaları veriliyor. B nin AC ye göre harmonik eşini bulunuz.

Çözüm: B nin AC ye göre harmonik eşi $D(d_1,d_2,d_3)$ olsun.

$$(AC,BD)=-1 \Rightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}=-1$$

O halde,

$$\frac{2-3}{1-3}\cdot\frac{1-d_1}{2-d_1}=-1 \Rightarrow d_1=5/3$$

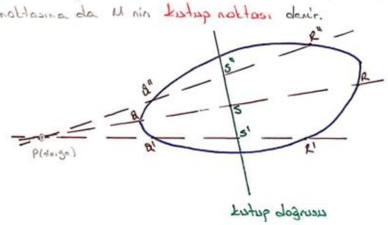
$$\frac{-1}{-2}\cdot\frac{-1-d_2}{-d_2}=-1 \Rightarrow d_2=-1/3$$

$$\frac{1-4}{-2-4}\cdot\frac{-2-d_3}{1-d_3}=-1 \Rightarrow d_3=0 \quad \Rightarrow D(5/3,-1/3,0) \text{ olur.}$$

143

KUTUP NOKTASI VE KUTUP DOĞRUSU

M koniği ve $P\notin M$, $P=(x_0,y_0)$ noktası verilsin. P den geçen doğruların koniği kestiği noktalara Q ve R diyelim. Q ve R noktalarına göre P noktasının harmonik eşi olan noktaların geometrik yerine M koniğinin P noktasına göre **kutup doğrusu**, P noktasına da M nin **kutup noktası** denir.



144

$\Phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemi ile verilen koniğin bir P noktasına göre kutup doğrusu

$$\boxed{\Phi_x|_P\cdot x+\Phi_y|_P\cdot y+D\,x(P)+E\,y(P)+2F=0}$$

dır.

Örnek: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğinin $P(-1,3)$ noktasına göre kutup doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$\Phi_x=10x+6y-4 \Rightarrow \Phi_x|_P=4$$

$$\Phi_y=6x+10y+4 \Rightarrow \Phi_y|_P=28$$

$$\Rightarrow 4x+28y+(-4)\cdot(-1)+4\cdot3-8=0$$

$$\Rightarrow 4x+28y+8=0$$

$$\Rightarrow x+7y+2=0$$

145

Örnek: $x^2+3xy+4y^2+2x-y=0$ koniğinin $P(1,-2)$ noktasına göre kutup doğrusunu bulunuz.

$(x+7y-2=0)$

146

Örnek: $x^2-xy-y^2+x+y-1=0$ koniğinin $x+2y+3=0$ kutup doğrusuna göre kutup noktasını bulunuz.

Çözüm:

Kutup noktası $P(x_0,y_0)$ olsun.

$\phi_x=2x-y+1$, $\phi_y=-x-2y+1$ olmak üzere kutup doğrusu,

$(2x_0-y_0+1)x+(-x_0-2y_0+1)y+x_0+y_0-2=0$ olur.

$$\Rightarrow \frac{2x_0-y_0+1}{1}=\frac{-x_0-2y_0+1}{2}=\frac{x_0+y_0-2}{3}$$ yazılabilir.

Buradan $x_0=-1/5$, $y_0=1$ bulunur.

$\Rightarrow P(-1/5,1)$ olur.

147

171

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 12

172

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

KONİK AİLELERİ

$\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemli α koniği verilsin.

Burada A, B ve C den en az biri sıfırdan farklıdır. $A\neq 0$ olsun.

$$\Rightarrow x^2+\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

$$\Rightarrow x^2+\lambda_1 xy+\lambda_2 y^2+\lambda_3 x+\lambda_4 y+\lambda_5=0 \quad \text{bulunur.}$$

O halde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ve λ_5 katsayıları bilinirse konik bellidir. Bunun için de koniğe ait 5 bağıntı bilinmelidir. O halde 5 farklı noktadan bir tek konik geçer.

Örnek $P_1(1,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$, $P_4(1,-1)$ ve $P_5(2,1)$ noktalarından geçen koniğin denklemini yazınız.

Çözüm: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

P_1 için $A+B+C+D+E+F=0$

P_2 için $C-E+F=0$

P_3 için $A+D+F=0$

P_4 için $A-B+C+D-E+F=0$

P_5 için $4A+2B+C+2D+E+F=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_1: \alpha_3 \to \alpha_3 + (-1)\alpha_1$

$\alpha_4 \to \alpha_4 + (-1)\alpha_1$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-4)\alpha_1$

149

$$\overset{E_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$E_2: \alpha_3 \to (-1)\alpha_3$

$\alpha_4 \to -\frac{1}{2}\alpha_4$

$\alpha_5 \to (-1)\alpha_5$

$$\overset{E_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_3: \alpha_3 \to \alpha_3 + (-1)\alpha_2$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-3)\alpha_2$

$\alpha_1 \to \alpha_1 + (-1)\alpha_2$

$$\overset{E_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_4: \alpha_4 \to \alpha_4 + (-1)\alpha_3$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-2)\alpha_3$

$\alpha_1 \to \alpha_1 + (-1)\alpha_3$

150

$$\overset{E_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_5: \alpha_5 \to \frac{1}{2}\alpha_5$

$\alpha_4 \to \frac{1}{3}\alpha_4$

$$\overset{E_5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_6: \alpha_1 \to \alpha_1 + (-4)\alpha_4$

$\alpha_2 \to \alpha_2 + 1\alpha_4$

$\alpha_3 \to \alpha_3 + 2\alpha_4$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-2)\alpha_4$

$$\overset{E_6}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$E_7: \alpha_1 \to \alpha_1 + (-1)\alpha_5$

151

$$\underset{E_3}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \underset{E_8}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$\Rightarrow A+\frac{1}{3}F=0,\ B-1/3F=0,\ C+4/3F=0,\ D-2/3F=0,\ E+1/3F=0$

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}Fx^2+\frac{1}{3}Fxy-\frac{4}{3}Fy^2+\frac{2}{3}Fx-\frac{1}{3}Fy+F=0$

$\Rightarrow x^2-xy+4y^2-2x+y-1=0$ bulunur.

152

Bu beş koşuldan biri veya bir kaçı verilmezse bir konik yerine bir konik ailesi elde edilir.

Şimdi P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktalarının verilmesiyle konik ailesinin nasıl elde edilebileceğini inceleyeceğiz:

I. Yol: P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktaların konik denkleminde yerine yazılmasıyla dört denklem elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesiyle iki parametreye bağlı çözümler elde edilir. Bu çözümler konik denkleminde yerine yazılarak konik ailesi elde edilir.

Bunu bir örnek ile açıklayalım:

153

Örnek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$ ve $P_4(1,-1)$ noktalarından geçen konik ailesinin denklemini bulunuz. Ailede çember, ikizkenar hiperbol, parabol var mıdır?

Çözüm: Koniğin denklemi $\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ olsun.

P_1 için $F=0$

$$\left.\begin{array}{ll} P_2 \text{ için} & C-E=0 \Rightarrow C=E \\ P_3 \text{ için} & A+D=0 \Rightarrow A=-D \\ P_4 \text{ için} & A-B+C+D-E=0 \end{array}\right\} B=0 \text{ olur.}$$

$\Rightarrow A=-D$, $C=E$ ve $B=0$ dır. O halde konik,

$-Dx^2+Ey^2+Dx+Ey=0$ konik ailesi bulunur.

i) Ailede Çember var mıdır?

$A=C$ ve $B=0$ olmalı. O halde $-D=E$ için çember elde edilir.

$\Rightarrow Ex^2+Ey^2-Ex+Ey=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-x+y=0$ ailedeki çemberdir.

154

---

ii) Ailede ikizkenar hiperbol var mıdır?

$A=-C$ olmalıdır. Yani,

$-Dx^2+Ey^2+Dx+Ey=0$ için $D=E$ olmalıdır.

$\Rightarrow -x^2+y^2+x+y=0$ ailedeki ikizkenar hiperboldür.

iii) Ailede parabol var mıdır?

$4AC-B^2=0$ olmalıdır.

$\Rightarrow 4(-D)E-0=0 \Rightarrow D=0$ veya $E=0$ bulunur.

$D=0$ için parabol $y^2+y=0$

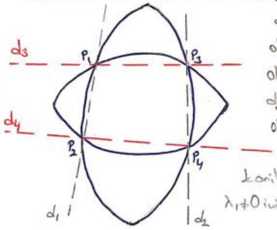
$E=0$ için parabol $-x^2+x=0$ olur.

155

II. YOL:

1) $P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_4$ olsun.

P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktalarından geçen iki konik $\Phi_1(x,y)=0$ ve $\Phi_2(x,y)=0$ ise bu 4 noktadan geçen tüm koniklerin (konik ailesinin) denklemi, $\lambda_1\Phi_1(x,y)+\lambda_2\Phi_2(x,y)=0$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ dir. Bu denklem de bir konik denklemidir ve P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarından geçer.



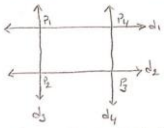
$d_1 \cdot d_2 = 0$ x veya y ye göre 2. dereceden olup bir konik belirtir. Bu konik $\Phi_1(x,y)=0$ olsun. P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları bu konik üzerindedir. $d_3 \cdot d_4=0$ bir konik belirtir. Bu konik $\Phi_2(x,y)=0$ olsun. P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları bu konik üzerindedir. O halde bu dört noktadan geçen konik ailesi: $\lambda_1\Phi_1(x,y)+\lambda_2\Phi_2(x,y)=0$ dır.

$\lambda_1 \neq 0$ için $\lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ alınırsa $\Phi_1(x,y)+\lambda\Phi_2(x,y)=0$ olur.

156

Örnek: $P_1(-4,0)$, $P_2(0,4)$, $P_3(0,-4)$, $P_4(5,6)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm: Önce bu dört noktadan geçen konik ailesini bulalım:



$d_1 \dots 2x-3y+8=0$

$d_2 \dots x=0$

$d_3 \dots x-y+4=0$

$d_4 \dots 2x-y-4=0$ olur.

d_1 ve d_2 nin belirttiği konik $\Phi_1(x,y)=d_1 \cdot d_2=0$

$$\Rightarrow \Phi_1(x,y)=2x^2-3xy+8x=0$$

d_3 ve d_4 ün belirttiği konik $\Phi_2(x,y)=d_3 \cdot d_4=0$

$$\Rightarrow \Phi_2(x,y)=2x^2-3xy+y^2+4x-16=0$$

bulunur.

157

O halde bu dört noktadan geçen konik ailesi,

$$\Phi_1(x,y)+\lambda\Phi_2(x,y)=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-3xy+8x+\lambda(2x^2-3xy+y^2+4x-16)=0$$

$$\Rightarrow (2+2\lambda)x^2-3(\lambda+1)xy+\lambda y^2+4(2+\lambda)x-16\lambda=0 \text{ olur.}$$

Parabol için $4AC-B^2=0$

$$\Rightarrow 4(2+2\lambda)\lambda-(3\lambda+3)^2=0$$

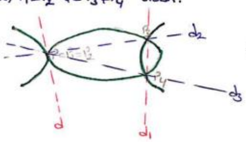
$$\Rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=-9 \text{ bulunur.}$$

$\lambda=-1$ için parabol $y^2-4x-16=0$

$\lambda=-9$ için parabol $16x^2-24xy+9y^2+28x-144=0$ olur.

158

2) $P_1=P_2$ ve $P_3 \neq P_4$ olsun.



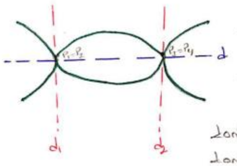
Bu durumda ailedeki konikler $P=P_1=P_2$ noktasında teğettirler. Teğet doğrusu d, $P-P_3$ ün belirttiği doğru d_2, $P-P_4$ ün belirttiği doğru d_3 ve P_3-P_4 ün belirttiği doğru d_1 olmak üzere

$\Phi_1(x,y)=d \cdot d_1=0$, $\Phi_2(x,y)=d_2 \cdot d_3=0$ birer konik olup bu dört noktadan geçer. O halde konik ailesi,

$$\Phi_1(x,y)+\lambda\Phi_2(x,y)=0 \text{ olur.}$$

159

3) $P_1 = P_2$ ve $P_3 = P_4$ olsun

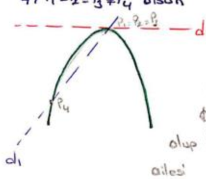


Bu durumda ailedeki konikler P_1 ve P_3 noktalarında teğet olurlar. P_1 ve P_3 deki teğet doğruları d_1 ve d_2 olsun. Ayrıca $P_1 - P_3$ ün belirttiği doğru d olmak üzere,

$\phi_1(x,y) = d.d = 0$, $\phi_2(x,y) = d_1.d_2 = 0$ birer konik olup bu dört noktadan geçer. O halde, konik ailesi

$$\phi_1(x,y) + \lambda\phi_2(x,y) = 0 \quad \text{olur.}$$

4) $P_1 = P_2 = P_3 \neq P_4$ olsun

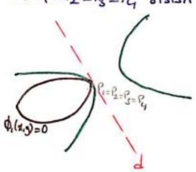


Bu durumda ailedeki koniklerin $P_1 = P_2 = P_3$ deki teğetleri aynıdır. Bu teğet doğrusu d olsun. Ayrıca $P_1 - P_4$ ün belirttiği doğru d_1 olmak üzere

$\phi_1(x,y) = d_1^2 = 0$, $\phi_2(x,y) = d_1.d = 0$ birer konik olup bu dört noktadan geçer. O halde konik ailesi

$$\phi_1(x,y) + \lambda\phi_2(x,y) = 0 \quad \text{olur.}$$

5) $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ olsun



Bu durumda konikler $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ noktasında teğettirler. Teğet doğrusu d olsun. Ayrıca bu durumda ailedeki koniklerden biri verilmelidir. Bu konik $\phi_1(x,y) = 0$ ve $\phi_2(x,y) = d.d = 0$ olmak üzere konik ailesi,

$$\phi_1(x,y) + \lambda\phi_2(x,y) = 0 \quad \text{olur.}$$

188

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 13

189

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

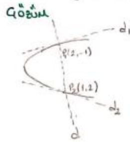
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14

Örnek: $P_1(2,-1)$ noktasında $d_1 \ldots x+2y=0$ ve $P_2(1,2)$ noktasında $d_2 \ldots 2x-y=0$ doğrularına teğet olan parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm



$\Phi_1(x,y)=d_1.d_2=0$

$\Rightarrow \Phi_1(x,y)=x^2+xy-y^2=0$ olur.

P_1-P_2 den geçen doğru,

$d \ldots 3x-y-7=0$

$\Phi_2(x,y)=d.d=0 \Rightarrow \Phi_2(x,y)=9x^2-6xy+y^2-42x+14y+49=0$

O halde konik ailesi

$\lambda_1(x^2+xy-y^2)+\lambda_2(9x^2-6xy+y^2-42x+14y+49)=0$

$\Rightarrow (2\lambda_1+9\lambda_2)x^2+2(\lambda_1-3\lambda_2)xy+(-2\lambda_1+\lambda_2)y^2-42\lambda_2x+14\lambda_2y+49\lambda_2=0$

$4AC-B^2=0 \Rightarrow \lambda_1(\lambda_1+2\lambda_2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_1=-\frac{1}{2}\lambda_2$

$\lambda_1=0$ için $9x^2-6xy+y^2-42x+14y+49=0$

$\lambda_1=-1/2\lambda_2$ için $16x^2-34xy+4y^2-84x+28y+98=0$ olur.

163

Örnek: $P_1(3,1)$ noktasında $d_1 \ldots x-3=0$ ve $P_2(1,3)$ noktasında $d_2 \ldots x-1=0$ doğrularına teğet olan ve $P(2,5)$ noktasından geçen koniğin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\Phi_1(x,y)=d_1.d_2=0 \Rightarrow \Phi_1(x,y)=x^2-4x+3$ olur.

P_1 ve P_2 den geçen doğru $d \ldots x+y-2=0$ olmak üzere

$\Phi_2(x,y)=d.d=0 \Rightarrow \Phi_2(x,y)=x^2+2xy+y^2-4x-4y+4=0$ olur.

O halde konik ailesi,

$\lambda_1(x^2-4x+3)+\lambda_2(x^2+2xy+y^2-4x-4y+4)=0$ olur.

$P(2,5)$ noktasından geçeceğinden $\lambda_1=25\lambda_2$ bulunur.

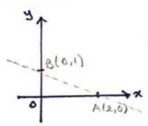
Yerine yazılırsa

$26x^2+2xy+y^2-104x-4y+79=0$ olur.

164

Örnek: $A(2,0)$ noktasında x eksenine, $B(0,1)$ noktasında y eksenine teğet olan koniklerden $d \ldots x-y+2=0$ doğrusunu teğet kabul eden koniğin denklemini bulunuz.

Çözüm:



$\Phi_1(x,y)=x.y=0$ olur.

A ve B den geçen doğru $x+2y-2=0$ dır.

O halde $\Phi_2(x,y)=(x+2y-2)^2=x^2+4xy+4y^2-4x-8y+4=0$

olup konik ailesi,

$\lambda_1(xy)+\lambda_2(x^2+4xy+4y^2-4x-8y+4)=0$ olur.

düzenlenirse $\lambda_2x^2+(\lambda_1+4\lambda_2)xy+4\lambda_2y^2-4\lambda_2x-8\lambda_2y+4\lambda_2=0$ bulunur.

Bu koniklerden $y=x+2$ doğrusuna teğet olanı bulalım. $y=x+2$ aile denkleminde yerine yazılırsa,

$(\lambda_1+9\lambda_2)x^2+(2\lambda_1+12\lambda_2)x+4\lambda_2=0$ bulunur.

165

$(\lambda_1+9\lambda_2)x^2+(2\lambda_1+12\lambda_2)x+4\lambda_2=0$ idi. Teğet olma koşulundan,

$(2\lambda_1+12\lambda_2)^2-4(\lambda_1+9\lambda_2).4\lambda_2=0$ olmalıdır.

$\Rightarrow \lambda_1(\lambda_1+8\lambda_2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$ veya $\lambda_1=-8\lambda_2$ bulunur.

O halde istenilen konikler,

$\lambda_1=0$ için $x^2+4xy+4y^2-4x-8y+4=0$

$\lambda_1=-8\lambda_2$ için $x^2-4xy+4y^2-4x-8y+4=0$ bulunur.

Örnek: y eksenini asimptot kabul eden ve x eksenine $P(1,0)$ noktasında teğet olan hiperbol ailesinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Konik denklemi $\phi(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ olsun.

$\phi_x=2Ax+By+D$, $\phi_y=Bx+2Cy+E$ ve asimptotik doğrultu m olmak üzere asimptotun denklemi,

$\phi_x+m\phi_y=0 \Rightarrow 2Ax+By+D+m(Bx+2Cy+E)=0$

$$\Rightarrow x+\frac{B+2mC}{2A+mB}y+\frac{D+mE}{2A+mB}=0$$

bulunur.

Asimptot y ekseni olacağından denklemi $x=0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow B+2mC=0 \Rightarrow m=-\frac{B}{2C}$$

$D+mE=0 \Rightarrow m=-\frac{D}{E}$ olur.

Asimptotik doğrultu için $m=\infty$ olacağından $C=E=0$ olmalıdır.

O halde konik denklemi,

$Ax^2+Bxy+Dx+F=0$ olur.

$P(1,0)$ noktasında x eksenine teğet olduğundan $P(1,0)$ denklemi sağlar. O halde $A+D+F=0$ dır.

x ekseninin denklemi $y=0$ olup teğet olma koşulundan

$Ax^2+Dx+F=0$

$\Rightarrow D^2-4AF=0 \Rightarrow F=\frac{D^2}{4A}$ bulunur.

$A+D+F=0$ ve $F=\frac{D^2}{4A}$ dan,

$A+D+\frac{D^2}{4A}=0 \Rightarrow (D+2A)^2=0$

$\Rightarrow D=-2A$

$\Rightarrow F=\frac{D^2}{4A}=A$ olur.

$Ax^2+Bxy+Dx+F=0 \Rightarrow Ax^2+Bxy-2Ax+A=0$

$\lambda=A/B$ alınırsa $\lambda x^2+xy-2\lambda x+\lambda=0$ bulunur. $4AC-B^2<0$ olup bu bir hiperbol ailesidir.

Örnek: $\phi_1(x,y)=3x^2-4y^2+12x+8y-4=0$

$\phi_2(x,y)=3x^2-4y^2-6x-8y-10=0$

koniklerinin arakesit noktalarından geçen konik ailesinin denklemini yazınız, parametrenin alacağı değerlere göre koniklerin sınıfını belirleyiniz.

Çözüm: $\lambda_1\phi_1(x,y)+\lambda_2\phi_2(x,y)=0$ veya $\phi_1(x,y)+\lambda\phi_2(x,y)=0$

$3(\lambda+1)x^2-4(\lambda+1)y^2+6(2-\lambda)x+8(1-\lambda)y-2(2+5\lambda)=0$

$4AC-B^2=-36(\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda=-1$

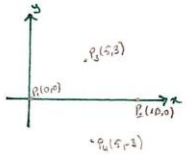
λ		-1	
Δ	Hiperbol sınıfı	0	Hiperbol sınıfı

$\Downarrow$

parabol sınıfı

Örnek: $P_1(0,0)$, $P_2(10,0)$, $P_3(5,3)$ noktalarından geçen ve x eksenine göre simetrik olan koniğin denklemini yazınız.

Yol Gösterme:



Konik x eksenine göre simetrik olduğundan $P_4(5,-3)$ noktasında konik üzerinde olacaktır. Bu 4 noktadan geçen konik ailesi yazılacaktır.

$(9x^2-25y^2-90x=0)$

170

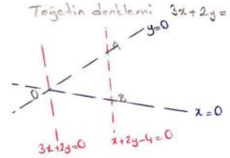
Örnek: $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(0,2)$ noktalarından geçen ve O noktasındaki normalleri $N(3,2)$ noktasından geçen koniklerin genel denklemini bulunuz.

Çözüm:

$O(0,0)$ ve $N(3,2)$ den geçen normalin eğimi $m_N = 2/3$

O halde koniğin $O(0,0)$ daki teğetinin denklemi $m_T = -3/2$ olur.

Teğetin denklemi $3x+2y=0$ dır.



$\phi_1(x,y) = (3x+2y)(x+2y-4) = 0$

$\Rightarrow \phi_1(x,y) = 3x^2+8xy+4y^2-12x-8y=0$

$\phi_2(x,y) = xy = 0$

Konik alilesi ise

$\lambda_1\phi_1(x,y) + \lambda_2\phi_2(x,y) = 0$ olur.

171

Örnek: $x+y-1=0$ ve $x-y=0$ doğrularını asimptot kabul eden hiperbol ailesinin denklemini bulunuz. Hiperbol ailesinin orijinden geçen hiperbollerini tespit ediniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \Rightarrow m=-1 \\ x-y=0 \Rightarrow m=1 \end{array}\right\} \text{ asimptotik doğrultular.}$$

Asimptotik doğrultular arasındaki bağıntı $Cm^2+Bm+A=0$ idi

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} C-B+A=0 \\ C+B+A=0 \end{array}\right\} B=0 \text{ ve } C=-A \text{ olur.}$$

O halde koniğimiz $Ax^2-Ay^2+Dx+Ey+F=0$ şeklindedir.

Asimptotlar için $\phi_x + 1\phi_y = 0$, $\phi_x + (-1)\phi_y = 0$.

$\phi_x + 1\phi_y = 0$ dan $2Ax-2Ay+D+E=0$ olup $x-y=0$ ile karşılaştırırsak

$D+E=0 \Rightarrow D=-E \ldots(1)$

172

$\phi_x + (-1)\phi_y = 0$ dan $2Ax+2Ay+D-E=0$ olup $x+y-1=0$ ile karşılaştırırsak

$2A = 2A = E-D$

$\Rightarrow E-D = 2A \ldots(2)$

(1) ve (2) den $A=E$ olur. O halde koniğimiz,

$Ax^2-Ay^2+Dx+Ey+F=0$ dan

$Ax^2-Ay^2-Ax+Ay+F=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-x+y+F/A=0 \quad (A\neq 0)$

$4AC-B^2=-4<0$ olup konik hiperbol sınıfındandır.

$(0,0)$ dan geçen üye için $F/A=0$ olacağından

$x^2-y^2-x+y=0$ bulunur.

173

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

KUADRİKLER

3-boyutlu Öklid uzayında x, y ve z ye göre 2. dereceden bir

$$\Psi(x,y,z) = A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + A_4xy + A_5xz + A_6yz + A_7x + A_8y + A_9z + A_{10} = 0$$

$A_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le 10$, denkleminin belirttiği yüzeylere **kuadrik** adı verilir. O halde $\Psi(x,y,z) = 0$ denkleminin bir kuadrik belirtmesi için ilk 6 katsayının hepsi birden sıfır olmamalıdır.

Kabul edelim ki: $A_1 \neq 0$ olsun. O halde,

$$\Psi(x,y,z) = x^2 + \frac{A_2}{A_1}y^2 + \frac{A_3}{A_1}z^2 + \frac{A_4}{A_1}xy + \frac{A_5}{A_1}xz + \frac{A_6}{A_1}yz + \frac{A_7}{A_1}x + \frac{A_8}{A_1}y + \frac{A_9}{A_1}z + \frac{A_{10}}{A_1} = 0$$

elde edilir. O halde kuadriğin tek olarak belli olması için yukarıdaki 9 katsayının bilinmesi gerekir. Bu da 9 koşul demektir. O halde 9 farklı noktadan bir tek kuadrik geçer diyebiliriz.

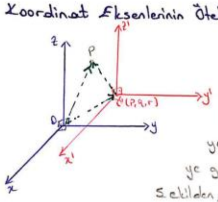
Kuadriklerin incelenmesi aynı koniklerde olduğu gibi çeşitli koordinat dönüşümleri yardımıyla sadeleştirilerek yapılır. Bu koordinat dönüşümleri,

1) Koordinat eksenlerinin ötelenmesi,

2) Koordinat eksenlerinin döndürülmesi

şeklindedir.

Koordinat Eksenlerinin Ötelenmesi



$\{O; x,y,z\}$ dik koordinat sisteminin $O(0,0,0)$ noktasını $O'(p,q,r)$ noktasına taşıyalım. Sistemin yeni hali $\{O'; x',y',z'\}$ olsun. Uzayın bir P noktasının $\{O; x,y,z\}$ ye göre koordinatları (x,y,z), $\{O'; x',y',z'\}$ ye göre koordinatları da (x',y',z') olsun.

Şekilden,

$$\vec{OO'}+\vec{O'P}=\vec{OP}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(x',y',z')+(p,q,r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x'+p \\ y=y'+q \\ z=z'+r \end{cases}$$ bulunur.

Not: Uygun öteleme ile kuadrik denklemindeki 1. dereceden terimlerin yok edilmesi hedeflenmektedir.

Örnek: $F(x,y,z)=x^2-2y^2+3z^2-4xy+yz-3x+4z-1=0$ kuadriğine öteleme işlemi uygulayınız.

Çözüm:

$x=x'+p,\ y=y'+q,\ z=z'+r$ eşitlikleri denklemde yazılıp düzenlenirse,

$$x'^2-2y'^2+3z'^2-4x'y'+y'z'+(2p-4q-3)x'+(-4p-4q+r)y'+(q+6r+4)z'+$$
$$p^2-2q^2+3r^2-4pq+qr-3p+4r-1=0$$

1. dereceden terimlerin yok olması için

$$\begin{cases} 2p-4q-3=0 \\ -4p-4q+r=0 \\ q+6r+4=0 \end{cases}$$ olmalıdır. $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ olup $\det A=-196\neq 0$ dır.

$$\Rightarrow p=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-196}=\frac{69}{196},\quad q=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{-196}=-\frac{8}{196}$$

$$r=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{-196}=\frac{-84}{196}$$ bulunur.

$$F'=\left(\frac{69}{196}\right)^2-2\left(\frac{8}{196}\right)^2+3\left(\frac{84}{196}\right)^2+4\,\frac{69}{196}\cdot\frac{8}{196}+\frac{8}{196}\cdot\frac{84}{196}-3\,\frac{69}{196}-4\,\frac{84}{196}-1$$

olmak üzere kuadriğin $\{O'; x',y',z'\}$ deki denklemi,

$x'^2-2y'^2+3z'^2-4x'y'+y'z'+F'=0$ olur.

NOT: Koordinat eksenlerinin döndürülmesiyle $F(x,y,z)=0$ denklemindeki xy, yz ve xz li terimler yok edilir.

NOT: Genel kuadrik denklemine hem öteleme hem de dönme işlemi uygulandığında denklemdeki birinci derece terimler ve xy, xz, yz li terimlerden yok olabilenlerden sonra merkezil kuadrik denklemi elde edilir. Biz kuadrikleri merkezil denklemlerini alarak inceleyeceğiz.

NOT: Öteleme sonrasında x, y ve z li terimlerden birisi yok olmayabilir.

NOT: $F(x,y,z)=0$ kuadriği için aynı koniklerde olduğu gibi ötelemeyi tespit etmek için kısmi türevlerden faydalanılabilir:

$F_x(p,q,r)=0$, $F_y(p,q,r)=0$, $F_z(p,q,r)=0$ kullanılır.

KUADRİKLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bir kuadriğin denkleminin

$$H(x,y,z) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + A_4 xy + A_5 xz + A_6 yz + A_7 x + A_8 y + A_9 z + A_{10}$$

denklemi ile verildiğini biliyoruz. Bu denkleme koordinat eksenlerinin ötelenmesi ve koordinat eksenlerinin döndürülmesi işlemi uygulanırsa genel olarak,

$$H(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

elde edilir. (Bazen 1. dereceden terimlerin tamamı kaybolmayabilir)

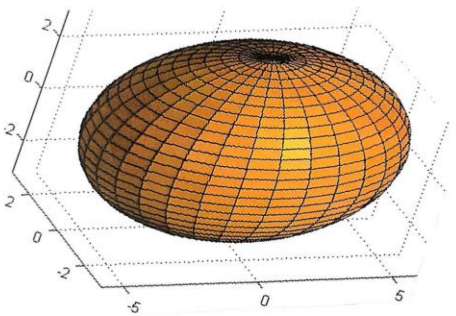
Bu son denklem katsayılarına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

180

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(Reel Elipsoid)}$$

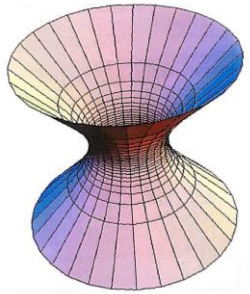
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{(Nokta Elipsoid)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{(Sanal Elipsoid)}$$



182

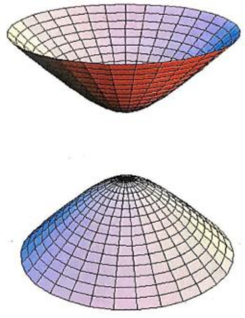
$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{1 parçalı (kanatlı) hiperboloid.}$$



184

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1 \end{aligned}\right\} \text{2 parçalı (kanatlı) hiperboloid}$$

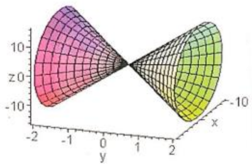
185

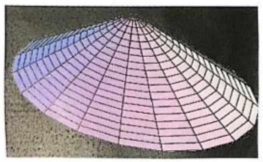


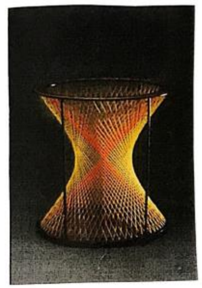
186

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=0 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=0 \end{aligned}\right\} \text{Eliptik koni}$$

187



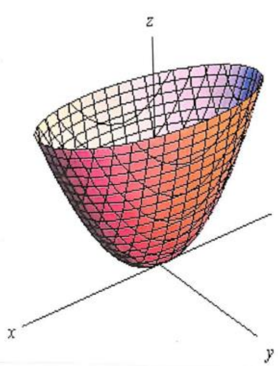




188

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=by \\[2ex] \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=ax \end{array}\right\} \text{Eliptik Paraboloid}$$

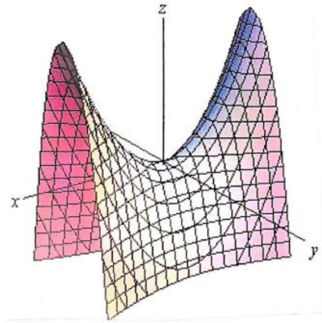
189

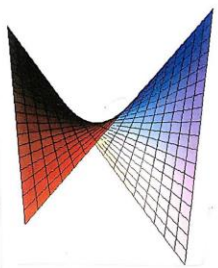


190

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=cz \\[2ex] -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=by \\[2ex] -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=by \\[2ex] \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=ax \\[2ex] -\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=ax \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Hiperbolik Paraboloid} \\ \text{(Semer Yüzeyi)}\end{array}$$

191

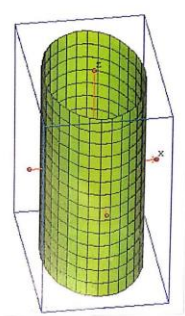


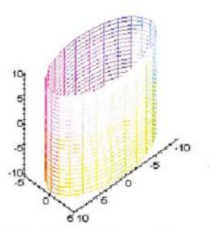


197

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2mm] \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{array}\right\} \text{Eliptik Silindir}$$

19

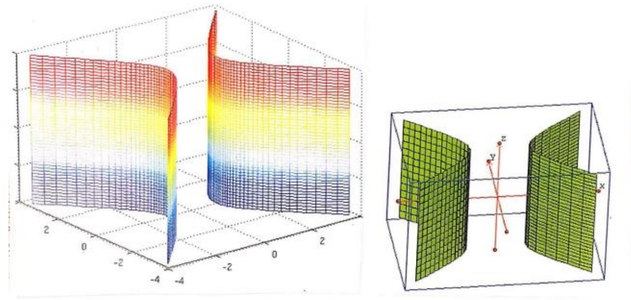




196

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\[2mm] -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2mm] -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2mm] \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2mm] -\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{array}\right\} \text{Hiperbolik Silindir}$$

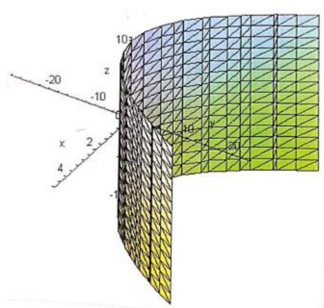
195



196

$$y = ax^2$$
$$y = cz^2$$
$$x = by^2$$
$$x = cz^2$$
$$z = ax^2$$
$$z = by^2$$

Parabolik silindir



198

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Kesişen iki düzlem

$$x^2 = 0$$
$$y^2 = 0$$
$$z^2 = 0$$

Çakışık iki düzlem

Örnek: Aşağıda denklemleri verilen kuadriklerin çeşidini belirleyiniz.

a) $2x^2+3y^2-z^2-4=0$

b) $3x^2-4y^2-5z=0$

c) $x^2+2y^2-z^2=0$

d) $y^2=3x$

e) $2x^2+3y^2+4z^2-5=0$

f) $3x^2-y^2+z^2+5=0$

g) $3x^2+4y-5z^2=0$

Çözüm:

a) Bir parçalı hiperboloid b) Hiperbolik paraboloid c) Eliptik koni

d) Parabolik silindir e) Elipsoid f) İki kanatlı hiperboloid

g) Hiperbolik paraboloid

200

Örnek: $4x^2-3y^2+5z^2+2x+6y-5z+25=0$ kuadriğini merkezil hale getirip çeşidini belirtiniz.

Çözüm:

1. dereceden terimleri yok etmek için

$$\begin{cases} x=x'+p \\ y=y'+q \\ z=z'+r \end{cases}$$

ötelemesi uygulanırsa $p=-1/4$, $q=1$, $r=1/2$ bulunur. O halde kuadriğin yeni sistemdeki denklemi

$$4x'^2-3y'^2+5z'^2+\frac{53}{2}=0$$ olup iki kanatlı hiperboloiddir.

(p, q ve r yi $f_x(p,q,r)=0$, $f_y(p,q,r)=0$, $f_z(p,q,r)=0$ dan da bulabiliriz)

201

Örnek: $2x^2-z^2+2x-3y+4z=0$ kuadriğini merkezil hale getirip çeşidini belirtiniz.

Çözüm:

$f_x(p,q,r)=4p+2=0 \Rightarrow p=-1/2$

$f_y(p,q,r)=-3\neq 0$ olup kısmi türev yöntemi uygulanamaz.

$$\begin{cases} x=x'+p \\ y=y'+q \\ z=z'+r \end{cases}$$ ötelemesi uygulanırsa

$$2x'^2-z'^2+\underbrace{(4p+2)}_{0}x'+(-3)y'+\underbrace{(-2r+4)}_{0}z'+\underbrace{2p^2-r^2+2p-3q+4r}_{0}=0$$

$\Rightarrow p=-1/2$, $r=2$, $q=7/6$ olur. O halde kuadriğin yeni sistemdeki denklemi

$$2x'^2-z'^2-3y'=0$$ olur. Bu ise hiperbolik paraboloiddir.

202

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin yanlarına yazılı uzaylarda belirttikleri geometrik yapıları belirleyiniz.

a) $x=0$; E^1, E^2 ve E^3 de

b) $x-2y=3$; E^2 ve E^3 de

c) $y=2x^2$; E^2 ve E^3 de

Çözüm:

a) E^1 de nokta, E^2 de doğru, E^3 de düzlem.

b) E^2 de doğru, E^3 de düzlem

c) E^2 de parabol, E^3 de parabolik silindir.

203

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

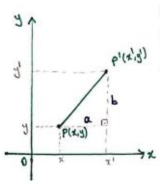
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 16

ÖTELEMELER



Şekildeki $P(x,y)$ noktasını $P'(x',y')$ noktasına götüren ötelemenin denklemi, $x'=x+a$, $y'=y+b$ olmak üzere

$$T \ldots \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

dir.

$\vec{PP'}$ vektörüne **öteleme vektörü** adı verilir. $\|\vec{PP'}\|=\sqrt{a^2+b^2}$ değeri ötelemenin uzunluğudur.

Ödev: Ötelemelerin uzaklıkları koruduğunu gösteriniz.

Yol Gösterme: $T \ldots \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$ ötelemesi için

$P(x_1,y_1) \xrightarrow{T} P'(x_1',y_1')$, $Q(x_2,y_2) \longrightarrow Q'(x_2',y_2')$ olmak üzere $d(P,Q)=d(P',Q')$ olduğu gösterilecektir.

Örnek: $T \ldots \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+4 \end{cases}$ ötelemesini kullanarak $(-5,-1)$ noktasının resmini ve $(0,0)$ noktasının esasını bulunuz.

Çözüm:

$$(-5,-1) \xrightarrow{T} ? \quad , \quad ? \xrightarrow{T} (0,0)$$

$$x' = -5+3 = -2 \ , \ y' = -1+4 = 3 \Rightarrow T(-5,-1) = (-2,3)$$

$0 = x+3 \Rightarrow x = -3$, $0 = y+4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow T(-3,-4) = (0,0)$ olur.

Örnek: $T \ldots \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+4 \end{cases}$ ötelemesi altında $2x+y-5=0$ doğrusunun resmini bulunuz.

Çözüm:

$$2x+y-5=0 \Rightarrow 2(x'-3)+y'-4-5=0$$

$\Rightarrow 2x'+y'-15=0$ olur.

Örnek: $T \ldots \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+4 \end{cases}$ ötelemesi hangi doğruyu orijinden geçen ve eğimi 2 olan doğruya dönüştürür.

Çözüm

$$d \xrightarrow{T} d' \quad , \quad d' \ldots \ y' = 2x'$$

$$\Rightarrow y+4 = 2(x+3)$$

$$\Rightarrow d \ldots \ y = 2x+2$$

208

Örnek: $(-3,1)$ noktasını $(2,0)$ noktasına götüren ötelemenin denklemini bulunuz.

Çözüm: $T \ldots \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$ $\quad (-3,1) \xrightarrow{T} (2,0)$

$$2 = -3+a \Rightarrow a = 5 \qquad \Rightarrow T \ldots \begin{cases} x' = x+5 \\ y' = y-1 \end{cases}$$

$$0 = 1+b \Rightarrow b = -1$$

NOT: $T \ldots \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$ ötelemesinin tersi $T^{-1} \ldots \begin{cases} x = x'-a \\ y = y'-b \end{cases}$ dir.

NOT:

$T_1 \ldots \begin{cases} x'' = x'+a_1 \\ y'' = y'+b_1 \end{cases}$ ve $T_2 \ldots \begin{cases} x' = x+a_2 \\ y' = y+b_2 \end{cases}$ ötelemelerinin bileşkesi

$T_1 \circ T_2 \ldots \begin{cases} x'' = x+(a_2+a_1) \\ y'' = y+(b_2+b_1) \end{cases}$ dir.

209

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 16

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

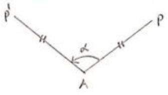
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17

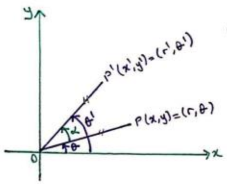
DÖNMELER

A düzlemin bir noktası olmak üzere, A noktasını kendisine ve düzlemin bir P noktasını da $\|AP\|=\|AP'\|$ ve $P\hat{A}P'=\alpha$ olacak şekildeki bir P' noktasına dönüştüren dönüşüme düzlemin A noktası etrafında α açılı dönmesi denir.



* A noktası etrafında α açılı dönmenin tersi, aynı nokta etrafında $-\alpha$ açılı dönmedir.
* A noktası etrafında α_1 ve α_2 açılı iki dönmenin bileşkesi aynı nokta etrafında $\alpha_1+\alpha_2$ açılı bir dönmedir.

Orijin Etrafında α açılı Dönmenin Denklemi



$P(x,y)$ noktasının α açılı dönme altında resmi $P'(x',y')$ olsun. P nin kutupsal koordinatları (r,θ), P' nün (r',θ') olsun. $(r=r')$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ve

$x'=r\cos\theta',\ y'=r\sin\theta'$ dır

$\theta'=\alpha+\theta$ olduğundan

$$\begin{cases} x'=r\cos(\alpha+\theta)=r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta \\ y'=r\sin(\alpha+\theta)=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}}$$ bulunur.

NOT: O etrafında α açılı R dönmesinin R^{-1} tersini bulalım:

$$R \dots \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow R^{-1} \dots \begin{cases} x = x'\cos(-\alpha) - y'\sin(-\alpha) \\ y = x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha) \end{cases}$$

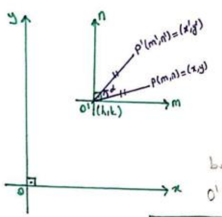
$$\Rightarrow R^{-1} \dots \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Örnek: Orijin etrafında $\frac{\pi}{6}$ radyanlık dönmenin denklemini yazarak bu dönme altında $(0,1)$ noktasının resmini ve $(2,1)$ noktasının aslını bulunuz.

213 %

GENEL DÖNME DENKLEMİ (Herhangi bir nokta etrafında)

$O'(h,k)$ etrafında α açılı dönmenin denklemini bulalım:



O' noktasına $m'n$ dik koordinat sistemini kuralım. O' etrafında α açılı dönme için

$$\begin{cases} m' = m\cos\alpha - n\sin\alpha \\ n' = m\sin\alpha + n\cos\alpha \end{cases}$$ yazılabilir.

$x = m + h,\ y = n + k$ ve $x' = m' + h,\ y' = n' + k$ bağıntıları yukarıda yerine yazılırsa, O' etrafında α açılı R dönmesi,

$$\boxed{R \dots \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + h(1-\cos\alpha) + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + k(1-\cos\alpha) - h\sin\alpha \end{cases}}$$

şeklinde olur.

Örnek: $(4,5)$ noktası etrafında dönme açısı $\frac{\pi}{3}$ olan dönme denklemini kullanarak resmi $O(0,0)$ olan noktayı bulunuz.

Çözüm:

$O'(h,k) = (4,5)$ $\quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + h(1-\cos\alpha) + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + k(1-\cos\alpha) - h\sin\alpha \end{cases}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ alınırsa $\quad R'_{O'(4,5)} = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} - 2\sqrt{3} \end{cases}$ olur.

$(x,y) \to (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y + 2 + \tfrac{5\sqrt{3}}{2} &= 0 \\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{2} - 2\sqrt{3} &= 0 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2-\frac{5\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ -5/2+2\sqrt{3} & 1/2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4-5\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2-\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{5}{2}+2\sqrt{3} \end{vmatrix}}{1} = \frac{5+4\sqrt{3}}{2}$$

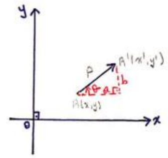
$$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{4-5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+4\sqrt{3}}{2} \right) \text{ olur.}$$

Örnek: Öteleme açısı θ ve öteleme vektörünün uzunluğu p olan bir T ötelemesinin denkleminin

$$T \ldots \begin{cases} x' = x + p\cos\theta \\ y' = y + p\sin\theta \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



$$T \ldots \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$ şeklindedir.

$$\cos\theta = \frac{a}{p} \Rightarrow a = p\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{p} \Rightarrow b = p\sin\theta$$

$$\Rightarrow T \ldots \begin{cases} x' = x + p\cos\theta \\ y' = y + p\sin\theta \end{cases}$$ olur.

216

250

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 17

251

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

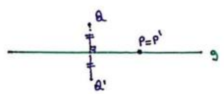
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

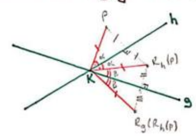
Ders 18

YANSIMALAR

g düzlemin bir doğrusu olmak üzere g üzerindeki tüm noktaları kendilerine, düzlemin diğer noktalarını da g ye göre simetriği olan noktalara götüren dönüşüme g doğrusuna göre bir yansıma denir. g ye de yansıma ekseni adı verilir.

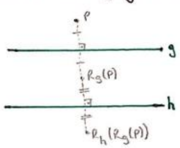


Kesişen İki Doğruya Göre Yansıma



Kesişen iki doğruya göre yansımanın bileşkesi bir dönmedir. Bu dönmenin merkezi doğruların kesim noktası, açısı ise doğruların arasındaki açının iki katı büyüklüğündedir.

Paralel İki Doğruya Göre Yansıma

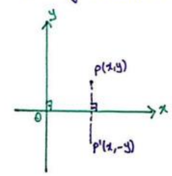


$R_h o R_g$ bileşkesi, g ve h doğruları arasındaki uzaklığın iki katı uzunluğunda öteleme vektörüne sahip bir ötelemedir.

218

Yansımaların Denklemleri

: x ve y eksenlerine göre yansımalar



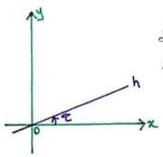
x eksenine göre yansımanın denklemi,

$$R_x \ldots \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \text{ dir. } \left(R_x^{-1} = R_x\right)$$

Benzer şekilde,

$$R_y \ldots \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \text{ olur. } \left(R_y^{-1} = R_y\right)$$

Orijinden Geçen Bir h Doğrusuna Göre Yansıma



Orijinden geçen ve eğim açısı θ olan bir h doğrusuna göre yansımanın denklemini bulalım:

Kesişen iki doğruya göre yansımadan, $R_h R_x$ bileşkesi 0 etrafında 2θ açılı dönmedir.

$$\Rightarrow R_h R_x = D \ldots \begin{cases} x'' = x'\cos 2\theta - y'\sin 2\theta \\ y'' = x'\sin 2\theta + y'\cos 2\theta \end{cases} \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow R_h = D R_x^{-1} \quad , \quad R_x^{-1} \ldots \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_h \ldots \begin{cases} x'' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ y'' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{cases}$$

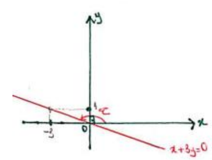
$$\Rightarrow \boxed{R_h \ldots \begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{cases}} \text{ bulunur.}$$

220

NOT: Yukarıdaki denklemden x ve y çekilirse,

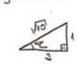
$$R_h^{-1} = R_h \ldots \begin{cases} x = x'\cos 2\theta + y'\sin 2\theta \\ y = x'\sin 2\theta - y'\cos 2\theta \end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek: $x + 3y = 0$ doğrusuna göre yansımanın denklemini yazınız.



θ açısı 2. bölgededir.

$\tan\theta = -1/3$



$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

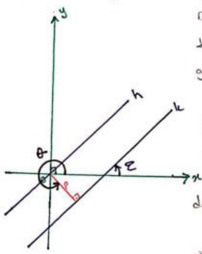
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{cases} \text{ olur.}$$

221

Orijinden Geçmeyen Bir k Doğrusuna Göre Yansıma



Orijinden geçmeyen ve eğim açısı τ olan k doğrusu verilsin. k ya paralel olan ve orijinden geçen bir h doğrusunu alalım.

Orijinden k ya indirilen dikmenin uzunluğu p ve bu dikmenin x ekseni ile yaptığı pozitif yöndeki açı da θ olsun.

$R_k \circ R_h$ bileşkesi $2p$ uzunluklu ve θ doğrultulu ötelemedir. (sayfa 218)

$R_k \circ R_h = T$

$\Rightarrow R_k = T \circ R_h^{-1}$

$R_h^{-1} = R_h$ olduğundan $R_k = T \circ R_h$ olur

222

$$R_h \ldots \begin{cases} x' = x\cos 2\tau + y\sin 2\tau \\ y' = x\sin 2\tau - y\cos 2\tau \end{cases} , \quad T \ldots \begin{cases} x'' = x' + 2p\cos\theta \\ y'' = y' + 2p\sin\theta \end{cases}$$

$$R_k = T \circ R_h \ldots \begin{cases} x'' = x\cos 2\tau + y\sin 2\tau + 2p\cos\theta \\ y'' = x\sin 2\tau - y\cos 2\tau + 2p\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow R_k \ldots \begin{cases} x' = x\cos 2\tau + y\sin 2\tau + 2p\cos\theta \\ y' = x\sin 2\tau - y\cos 2\tau + 2p\sin\theta \end{cases}}$$

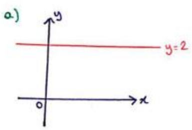
223

Örnek: Aşağıdaki doğrulara göre yansıma denklemlerini yazınız.

a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

Çözüm:

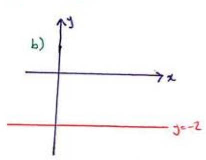
a)



$p = 2$, $\tau = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow R \ldots \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 4 \end{cases}$$

b)



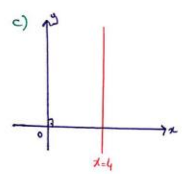
$p = 2$, $\tau = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\Rightarrow R \ldots \begin{cases} x' = x \\ y' = -y - 4 \end{cases}$$

224

---

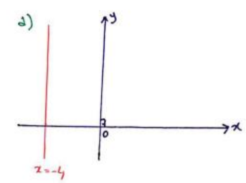
c)



$p = 4$, $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0$

$$R \ldots \begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = -y \end{cases}$$

d)



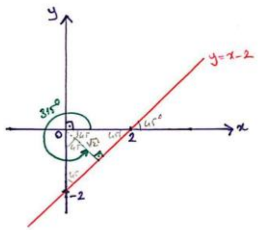
$p = 4$, $\tau = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$

$$R \ldots \begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = y \end{cases}$$

225

Örnek: $y=x-2$ doğrusuna göre yansımanın denklemini yazınız.

Çözüm:



$p=\sqrt{2}$, $\tau=45^0$, $\theta=315^0$

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\tau + y\sin 2\tau + 2p\cos\theta \\ y' = x\sin 2\tau - y\cos 2\tau + 2p\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y+2 \\ y' = x-2 \end{cases}$$ bulunur.

226

262

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 18