ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

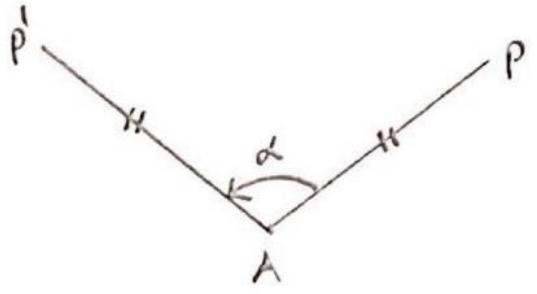
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17

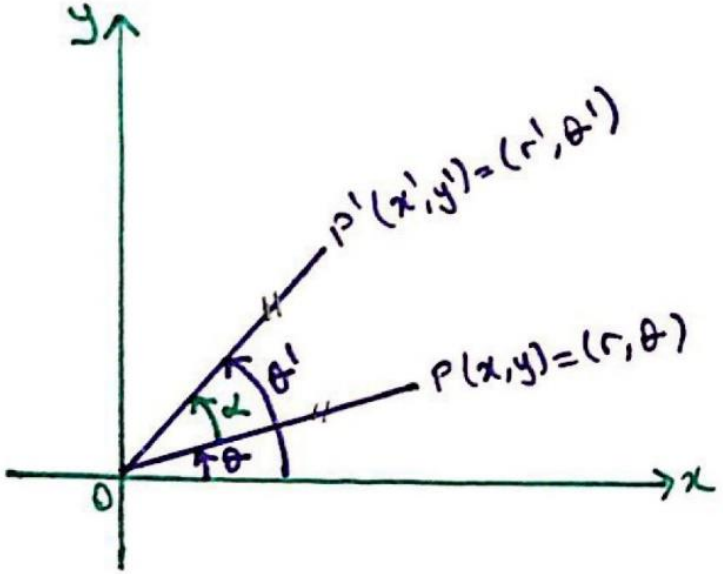
DÖNMELER

A düzlemin bir noktası olmak üzere, A noktasını kendisine ve düzlemin bir P noktasını da $\|AP\| = \|AP'\|$ ve $P\hat{A}P' = \alpha$ olacak şekildeki bir P' noktasına dönüştüren dönüşüme düzlemin A noktası etrafında α açılı dönmesi denir.



* A noktası etrafında α açılı dönmenin tersi, aynı nokta etrafında $-\alpha$ açılı dönmedir.
* A noktası etrafında α_1 ve α_2 açılı iki dönmenin bileşkesi aynı nokta etrafında $\alpha_1+\alpha_2$ açılı bir dönmedir.

Orijin Etrafında α açılı Dönmenin Denklemi



$P(x,y)$ noktasının α açılı dönme altında resmi $P'(x',y')$ olsun. P nin kutupsal koordinatları (r,θ), P' nün (r',θ') olsun. $(r=r')$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ve

$x'=r\cos\theta',\ y'=r\sin\theta'$ dır

$\theta'=\alpha+\theta$ olduğundan

$$\begin{cases} x'=r\cos(\alpha+\theta)=r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta \\ y'=r\sin(\alpha+\theta)=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}}$$ bulunur.

NOT: O etrafında α açılı R dönmesinin R^{-1} tersini bulalım:

$$R \dots \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

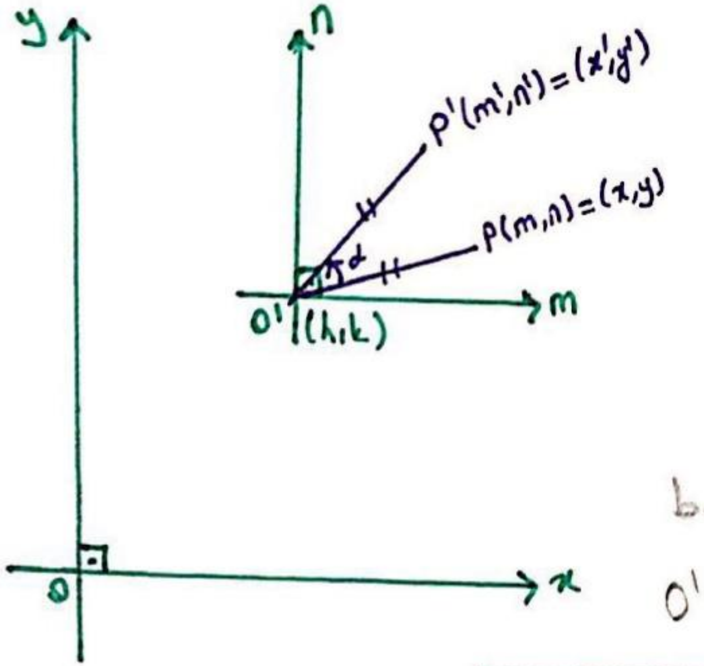
$$\Rightarrow R^{-1} \dots \begin{cases} x = x'\cos(-\alpha) - y'\sin(-\alpha) \\ y = x'\sin(-\alpha) + y'\cos(-\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow R^{-1} \dots \begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Örnek: Origin etrafında $\frac{\pi}{6}$ radyanlık dönmenin denklemini yazarak bu dönme altında $(0,1)$ noktasının resmini ve $(2,1)$ noktasının esasını bulunuz.

GENEL DÖNME DENKLEMİ (Herhangi bir nokta etrafında)

$O'(h,k)$ etrafında α açılı dönmenin denklemini bulalım:



O' noktasına $mO'n$ dik koordinat sistemini kuralım. O' etrafında α açılı dönme için

$$\begin{cases} m' = m\cos\alpha - n\sin\alpha \\ n' = m\sin\alpha + n\cos\alpha \end{cases}$$

yazılabilir.

$x = m+h,\ y = n+k$ ve $x' = m'+h,\ y' = n'+k$

bağıntıları yukarıda yerine yazılırsa,

O' etrafında α açılı R dönmesi,

$$\boxed{R \ldots \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + h(1-\cos\alpha) + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + k(1-\cos\alpha) - h\sin\alpha \end{cases}}$$

şeklinde olur.

Örnek: (4,5) noktası etrafında dönme açısı $\frac{\pi}{3}$ olan dönme denklemini kullanarak resmi O(0,0) olan noktayı bulunuz.

Çözüm:

$O'(h,k) = (4,5)$
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + h(1-\cos\alpha) + k\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + k(1-\cos\alpha) - h\sin\alpha \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ alınırsa

$$R'_{O'(4,5)} = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} - 2\sqrt{3} \end{cases}$$ olur.

$(x,y) \to (0,0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2-\frac{5\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ -5/2+2\sqrt{3} & 1/2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4-5\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2-\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{5}{2}+2\sqrt{3} \end{vmatrix}}{1} = \frac{5+4\sqrt{3}}{2}$$

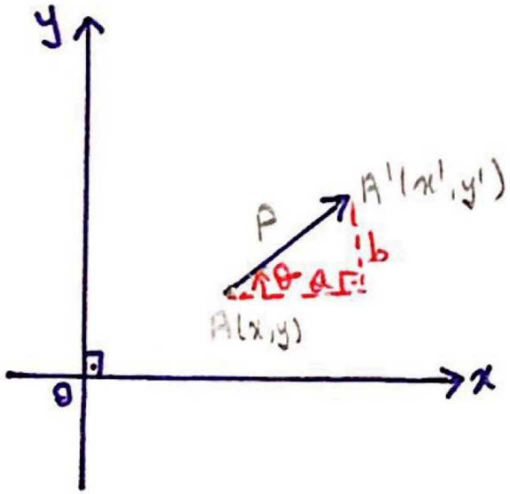
$$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{4-5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+4\sqrt{3}}{2}\right)$$ olur.

Örnek: Öteleme açısı θ ve öteleme vektörünün uzunluğu p olan bir T ötelemesinin denkleminin

$$T \ldots \begin{cases} x' = x + p\cos\theta \\ y' = y + p\sin\theta \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



$$T \ldots \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$ şeklindedir.

$$\cos\theta = \frac{a}{p} \Rightarrow a = p\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{p} \Rightarrow b = p\sin\theta$$

$$\Rightarrow T \ldots \begin{cases} x' = x + p\cos\theta \\ y' = y + p\sin\theta \end{cases}$$ olur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 17