ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

KUADRİKLER

3-boyutlu Öklid uzayında x, y ve z ye göre 2. dereceden bir
$\varphi(x,y,z) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + A_4 xy + A_5 xz + A_6 yz + A_7 x + A_8 y + A_9 z + A_{10} = 0$
$A_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 10$, denkleminin belirttiği yüzeylere kuadrik adı verilir.
O halde $\varphi(x,y,z) = 0$ denkleminin bir kuadrik belirtmesi için ilk 6 katsayının hepsi birden sıfır olmamalıdır.

Kabul edelim ki $A_1 \neq 0$ olsun. O halde,

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + \frac{A_2}{A_1} y^2 + \frac{A_3}{A_1} z^2 + \frac{A_4}{A_1} xy + \frac{A_5}{A_1} xz + \frac{A_6}{A_1} yz + \frac{A_7}{A_1} x + \frac{A_8}{A_1} y + \frac{A_9}{A_1} z + \frac{A_{10}}{A_1} = 0$$

elde edilir. O halde kuadriğin tek olarak belli olması için yukarıdaki 9 katsayının bilinmesi gerekir. Bu da 9 koşul demektir. O halde 9 farklı noktadan bir tek kuadrik geçer diyebiliriz.

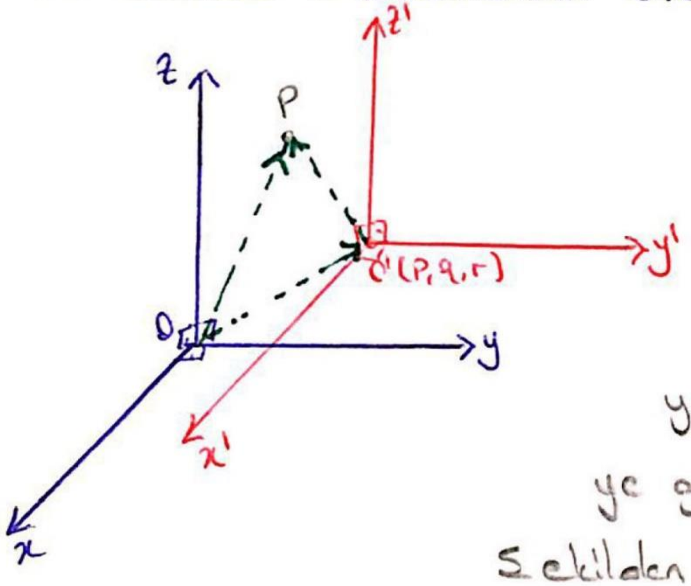
Kuadriklerin incelenmesi aynı koniklerde olduğu gibi çeşitli koordinat dönüşümleri yardımıyla sadeleştirilerek yapılır. Bu koordinat dönüşümleri,

1) Koordinat eksenlerinin ötelenmesi,

2) Koordinat eksenlerinin döndürülmesi

şeklindedir.

Koordinat Eksenlerinin Ötelenmesi



$\{O; x, y, z\}$ dik koordinat sisteminin $O(0,0,0)$ noktasını $O'(p,q,r)$ noktasına taşıyalım. Sistemin yeni hali $\{O'; x', y', z'\}$ olsun. Uzayın bir P noktasının $\{O; x, y, z\}$ ye göre koordinatları (x, y, z), $\{O'; x', y', z'\}$ ye göre koordinatları da (x', y', z') olsun.

Şekilden,

$$\vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (x', y', z') + (p, q, r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + p \\ y = y' + q \\ z = z' + r \end{cases}$$ bulunur.

Not: Uygun öteleme ile kuadrik denklemindeki 1. dereceden terimlerin yok edilmesi hedeflenmektedir.

Örnek: $f(x,y,z)=x^2-2y^2+3z^2-4xy+yz-3x+4z-1=0$ kuadriğine öteleme işlemi uygulayınız.

Çözüm:

$x=x'+p,\ y=y'+q,\ z=z'+r$ eşitlikleri denklemde yazılıp düzenlenirse,

$$x'^2-2y'^2+3z'^2-4x'y'+y'z'+(2p-4q-3)x'+(-4p-4q+r)y'+(q+6r+4)z'+$$
$$p^2-2q^2+3r^2-4pq+qr-3p+4r-1=0$$

1. dereceden terimlerin yok olması için

$$\begin{cases} 2p-4q-3=0 \\ -4p-4q+r=0 \\ \quad q+6r+4=0 \end{cases}$$ olmalıdır. $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ olup $\det A=-196\neq 0$ dır.

$$\Rightarrow p=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-196}=\frac{69}{196}, \quad q=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{-196}=-\frac{8}{196}$$

$$r=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{-196}=\frac{-84}{196}$$ bulunur.

$$F'=\left(\frac{69}{196}\right)^2-2\left(\frac{8}{196}\right)^2+3\left(\frac{84}{196}\right)^2+4\,\frac{69}{196}\cdot\frac{8}{196}+\frac{8}{196}\cdot\frac{84}{196}-3\,\frac{69}{196}-4\,\frac{84}{196}-1$$

olmak üzere kuadriğin $\{0';x',y',z'\}$ deki denklemi,

$$x'^2-2y'^2+3z'^2-4x'y'+y'z'+F'=0$$ olur.

NOT: Koordinat eksenlerinin döndürülmesiyle $f(x,y,z)=0$ denklemindeki xy, yz ve xz li terimler yok edilir.

NOT: Genel kuadrik denklemine hem öteleme hem de dönme işlemi uygulandığında denklemdeki birinci derece terimler ve xy, xz, yz li terimlerden yok olabilenlerden sonra merkezil kuadrik denklemi elde edilir.

Biz kuadrikleri merkezil denklemlerini alarak inceleyeceğiz.

NOT: Öteleme sonrasında x, y ve z li terimlerden birisi yok olmayabilir.

NOT: $f(x,y,z)=0$ kuadriği için aynı koniklerde olduğu gibi ötelemeyi tespit etmek için kısmi türevlerden faydalanılabilir:

$f_x(p,q,r)=0$, $f_y(p,q,r)=0$, $f_z(p,q,r)=0$ kullanılır.

KUADRİKLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bir kuadriğin denkleminin

$$F(x,y,z) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + A_4 xy + A_5 xz + A_6 yz + A_7 x + A_8 y + A_9 z + A_{10}$$

denklemi ile verildiğini biliyoruz. Bu denkleme koordinat eksenlerinin ötelenmesi ve koordinat eksenlerinin döndürülmesi işlemi uygulanırsa genel olarak,

$$F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

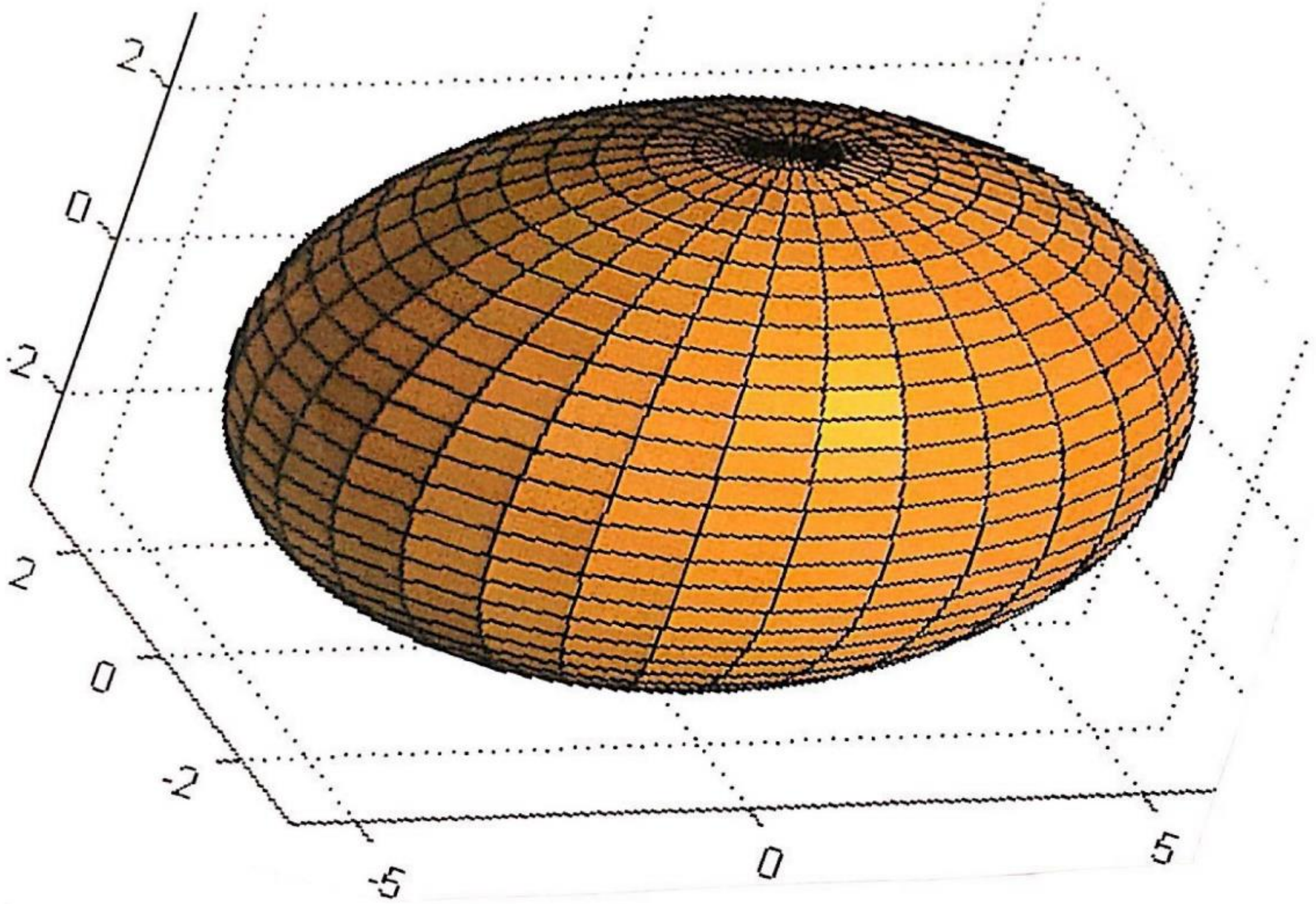
elde edilir. (Bazen 1. dereceden terimlerin tamamı kaybolmayabilir)

Bu son denklem katsayılarına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

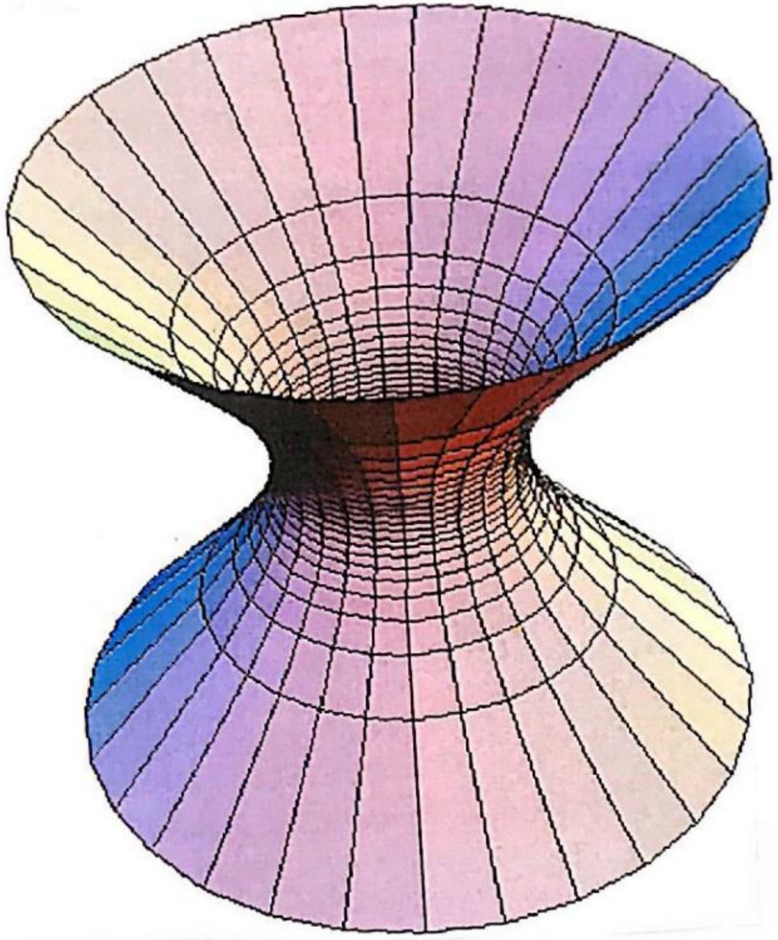
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(Reel Elipsoid)}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{(Nokta Elipsoid)}$$

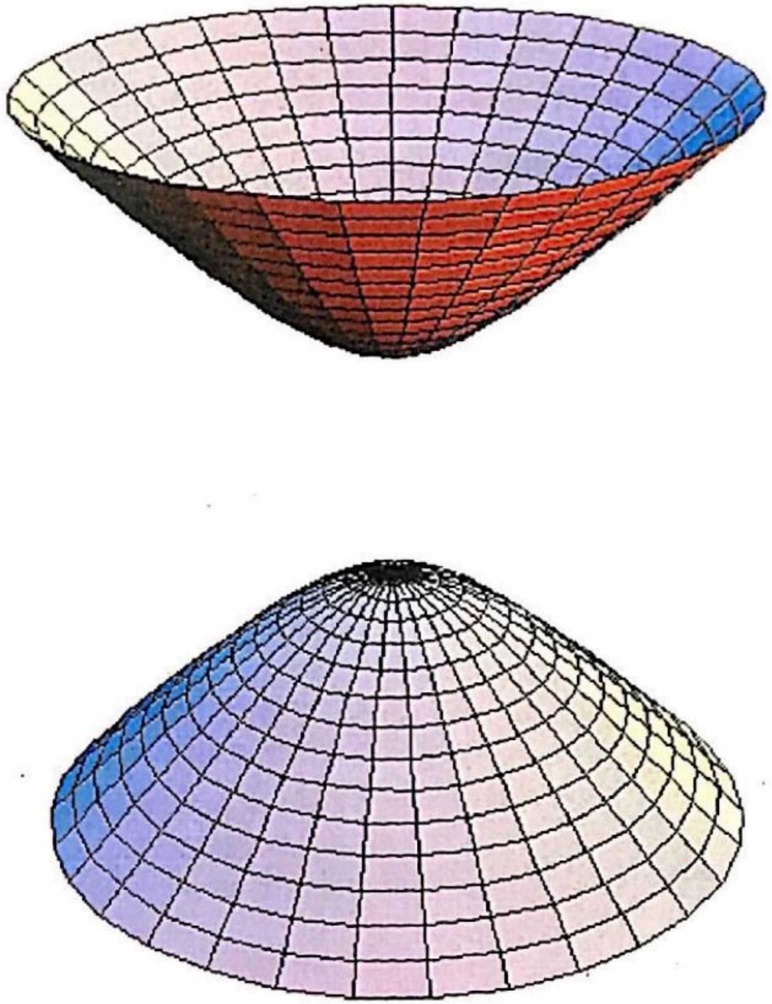
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(Sanal Elipsoid)}$$


2
0
-2
2
0
-2
-5
0
5

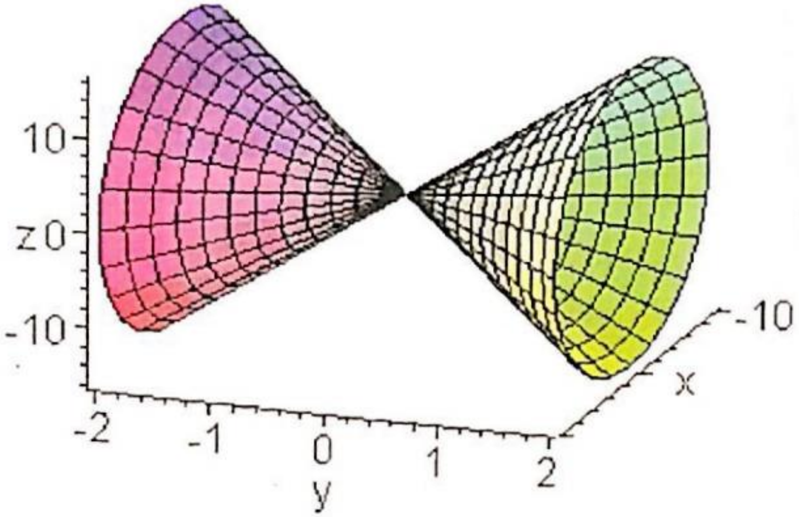
$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2ex]
\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2ex]
-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1
\end{array}\right\}\ \text{1 parçalı (kanatlı) hiperboloid.}$$

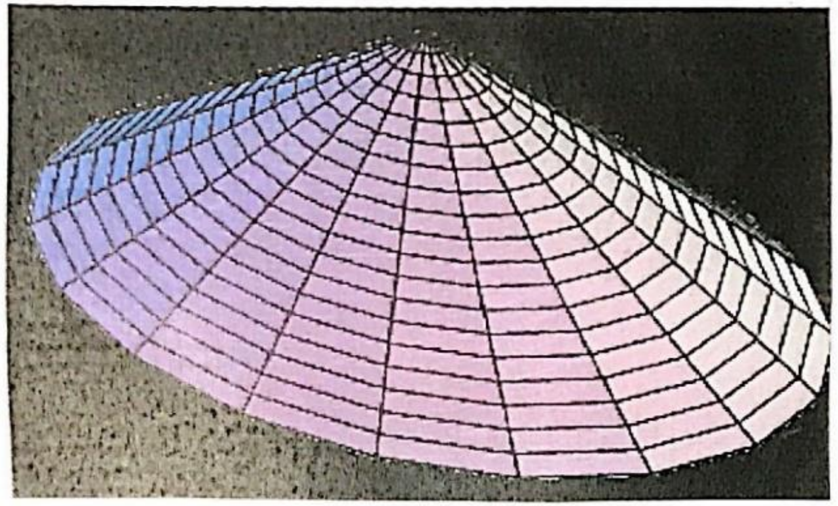


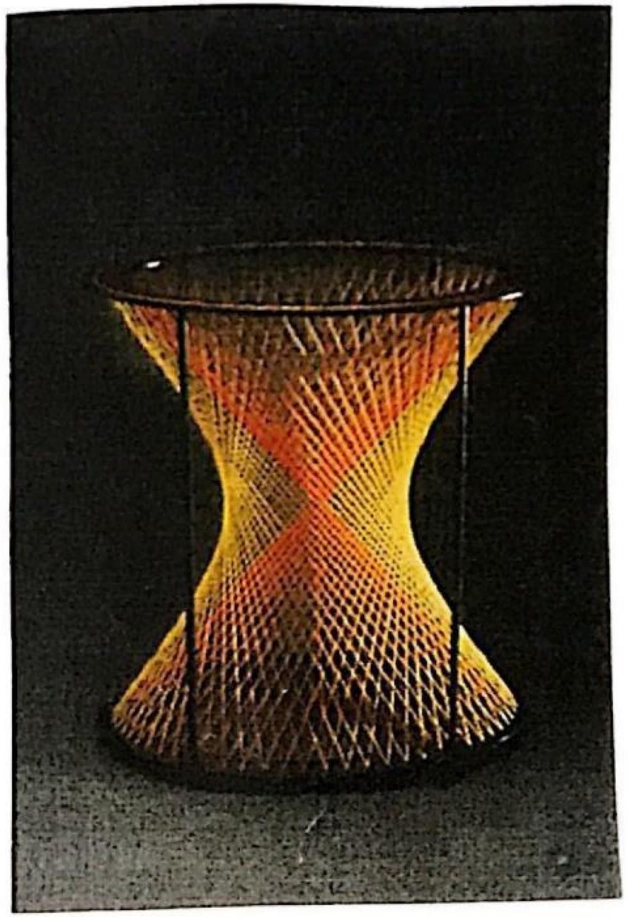
$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1 \end{aligned}\right\} \text{2 parçalı (kanatlı) hiperboloid}$$



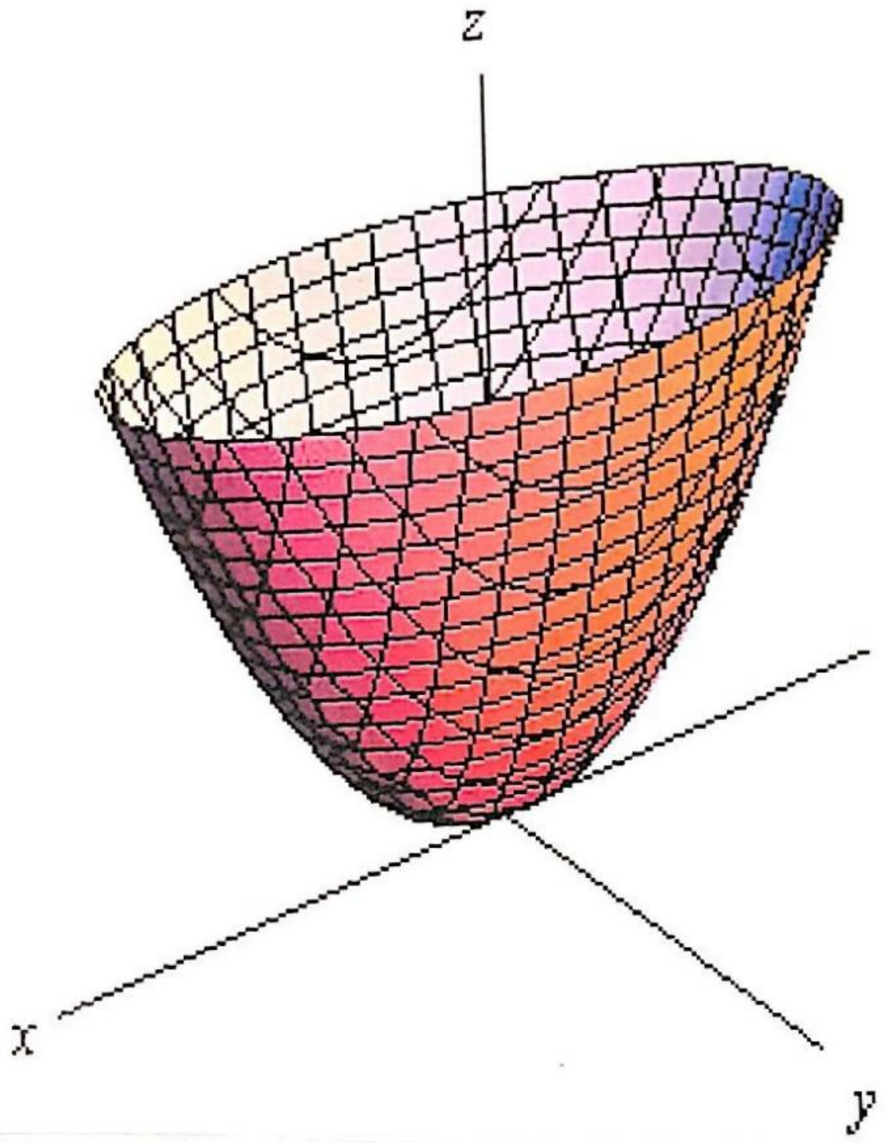
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\\
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0\\
-&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0
\end{aligned}\right\}\ \text{Eliptik koni}$$


10
z 0
-10
-10
x
-2
-1
0
1
2
y





$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=cz \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}&=by \\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=ax \end{aligned}\right\} \text{Eliptik Paraboloid}$$


z
x
y

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

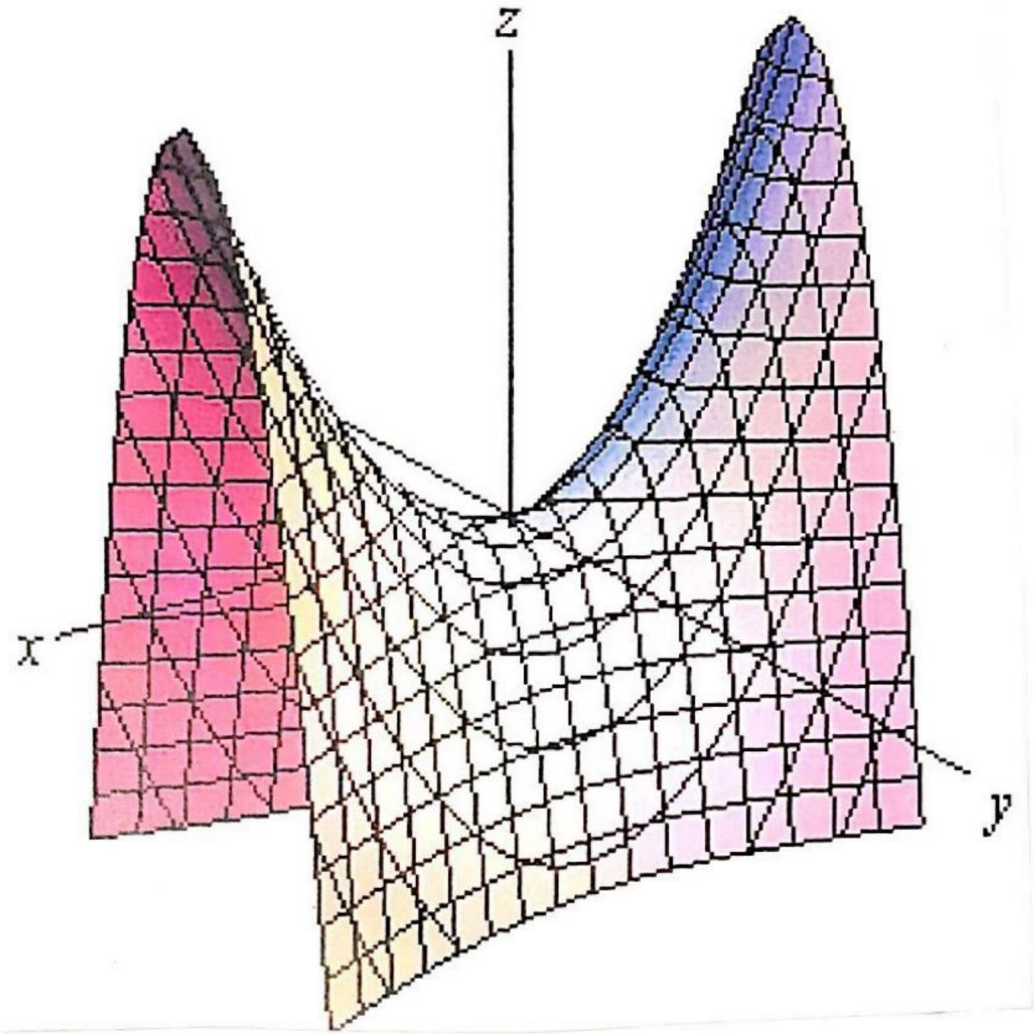
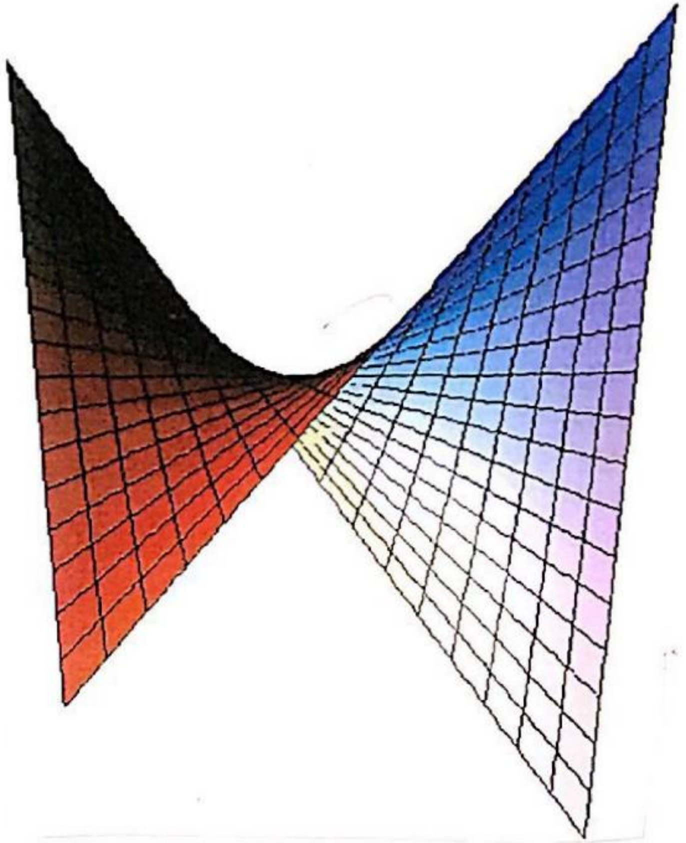
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=by$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by$$

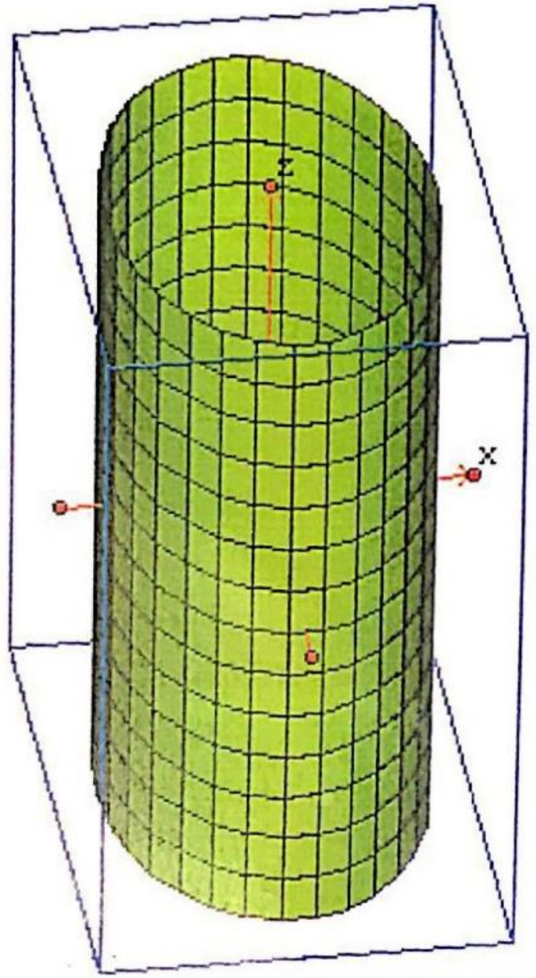
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=ax$$

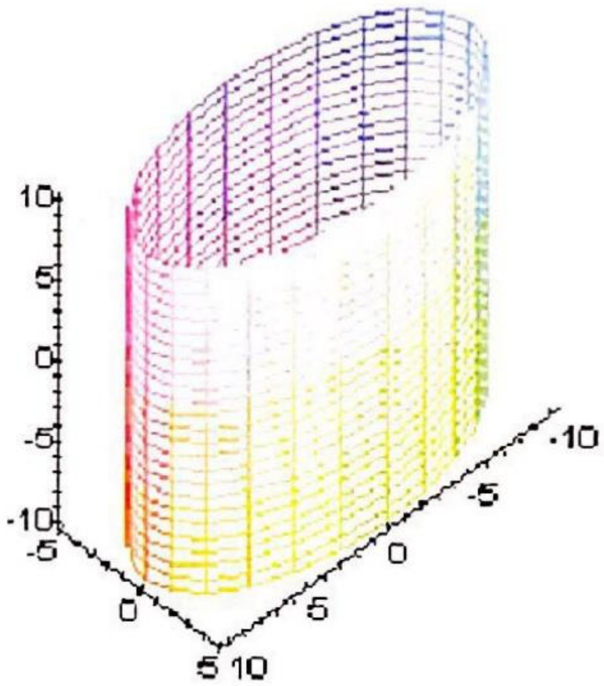
$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$$

Hiperbolik Paraboloid
(Semer Yüzeyi)

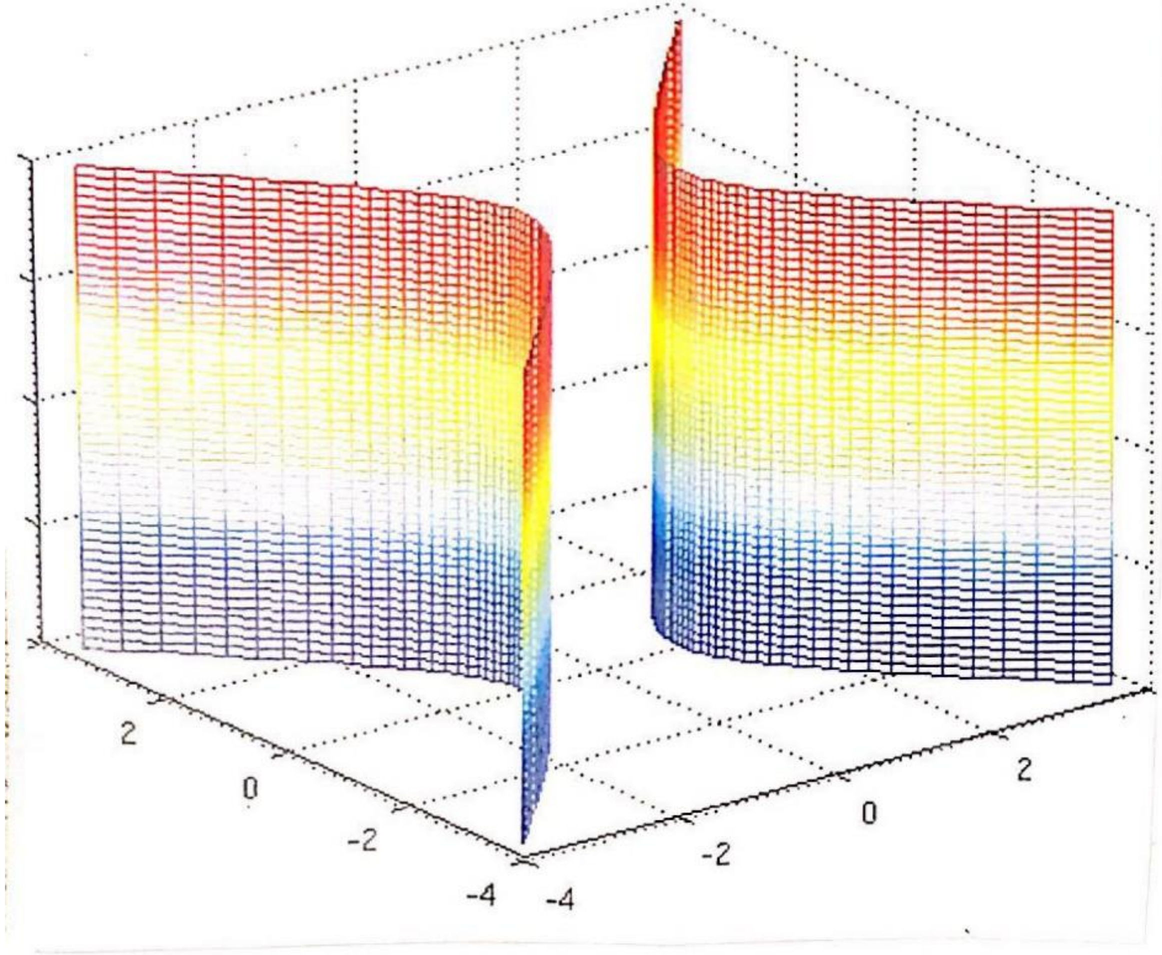

z
x
y


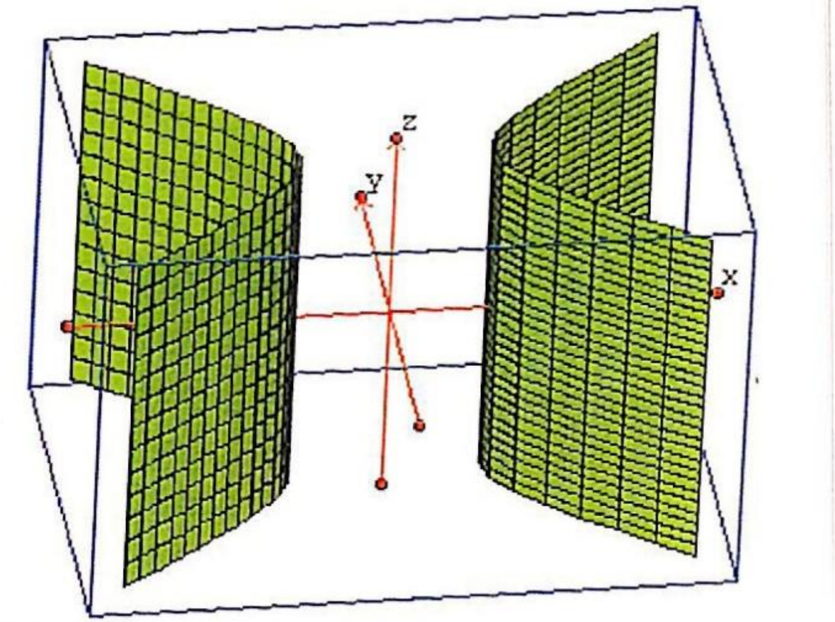
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\[2ex]
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\[2ex]
&\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1
\end{aligned}\right\}\ \text{Eliptik Silindir}$$


z
x

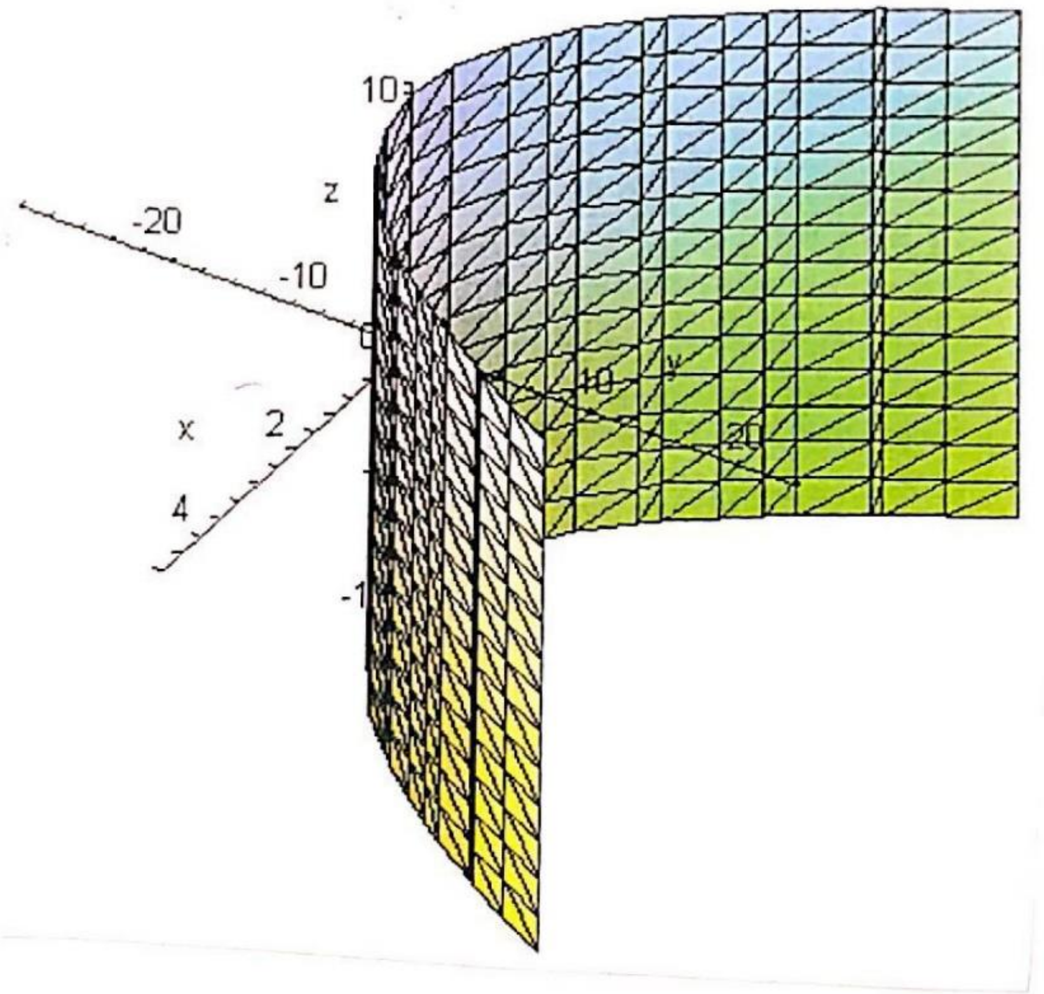

10
5
0
-5
-10
-5
0
5
10
-10
-5
0
5
10

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\[2ex] -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2ex] -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2ex] \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\[2ex] -\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{array}\right\}\ \text{Hiperbolik Silindir}$$


2
0
-2
-4
-4
-2
0
2


z
y
x

$$\left.\begin{array}{l} y=ax^2\\ y=cz^2\\ x=by^2\\ x=cz^2\\ z=ax^2\\ z=by^2 \end{array}\right\}\ \text{Parabolik silindir}$$



198 7

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}&=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=0 \end{aligned}\right\}\ \text{Kesişen iki düzlem}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2&=0 \\ y^2&=0 \\ z^2&=0 \end{aligned}\right\}\ \text{Çakışık iki düzlem}$$

Örnek: Aşağıda denklemleri verilen kuadriklerin çeşidini belirleyiniz.

a) $2x^2+3y^2-z^2-4=0$

b) $3x^2-4y^2-5z=0$

c) $x^2+2y^2-z^2=0$

d) $y^2=3x$

e) $2x^2+3y^2+4z^2-5=0$

f) $3x^2-y^2+z^2+5=0$

g) $3x^2+4y-5z^2=0$

Çözüm:

a) Bir parçalı hiperboloid **b)** Hiperbolik paraboloid **c)** Eliptik koni **d)** Parabolik silindir **e)** Elipsoid **f)** İki kanatlı hiperboloid **g)** Hiperbolik paraboloid

Örnek: $4x^2-3y^2+5z^2+2x+6y-5z+25=0$
kuadriğini merkezil hale getirip çeşidini belirtiniz.

Çözüm:

1. dereceden terimleri yok etmek için

$$\begin{cases} x = x'+p \\ y = y'+q \\ z = z'+r \end{cases}$$

ötelemesi uygulanırsa $p=-1/4$, $q=1$, $r=1/2$ bulunur. O halde kuadriğin yeni sistemdeki denklemi

$4x'^2-3y'^2+5z'^2+\frac{53}{2}=0$ olup iki kanatlı hiperboloiddir.

(p, q ve r yi $F_x(p,q,r)=0$, $F_y(p,q,r)=0$, $F_z(p,q,r)=0$ dan da bulabiliriz)

Örnek: $2x^2-z^2+2x-3y+4z=0$ kuadriğini merkezil hale getirip çeşidini belirtiniz.

Çözüm:

$F_x(p,q,r)=4\cdot p+2=0 \Rightarrow p=-1/2$

$F_y(p,q,r)=-3\neq 0$ olup kısmi türev yöntemi uygulanamaz.

$$\begin{cases} x=x'+p \\ y=y'+q \\ z=z'+r \end{cases}$$ ötelemesi uygulanırsa

$$2x'^2-z'^2+(\underbrace{4p+2}_{0})x'+(-3)y'+(\underbrace{-2r+4}_{0})z'+\underbrace{2p^2-r^2+2p-3q+4r}_{0}=0$$

$\Rightarrow p=-1/2$, $r=2$, $q=7/6$ olur. O halde kuadriğin yeni sistemdeki denklemi

$2x'^2-z'^2-3y'=0$ olur. Bu ise hiperbolik paraboloiddir.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin yanlarına yazılı uzaylarda belirttikleri geometrik yapıları belirleyiniz.

a) $x=0$; E^1, E^2 ve E^3 de

b) $x-2y=3$; E^2 ve E^3 de

c) $y=2x^2$; E^2 ve E^3 de

Çözüm:

a) E^1 de nokta, E^2 de doğru, E^3 de düzlem.

b) E^2 de doğru, E^3 de düzlem

c) E^2 de parabol, E^3 de parabolik silindir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 15