ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

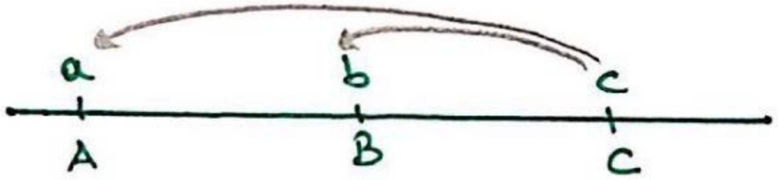
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12

Bölme Oranı

Koniklerde kutup noktası ve kutup doğrusu kavramlarını vermeden önce bazı temel kavramlara ihtiyacımız bulunmaktadır. Bunlardan biri de bölme oranıdır.

Tanım: A,B,C doğrudaş üç nokta olsun. $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ oranına C noktasının AB doğru parçasını **bölme oranı** denir. (AB,C) ile gösterilir.

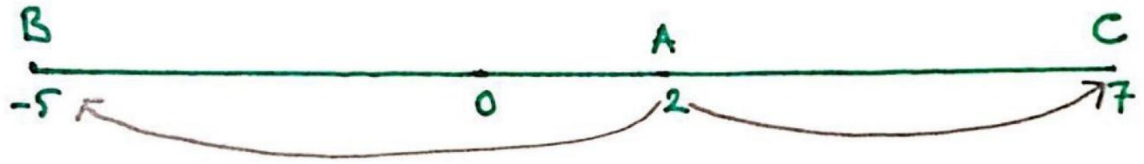


Buna göre, $(AB,C) = \frac{a-c}{b-c}$ dir.

Örnek: $A=(2)$, $B(-5)$, $C(7)$ için $(BC,A)=?$

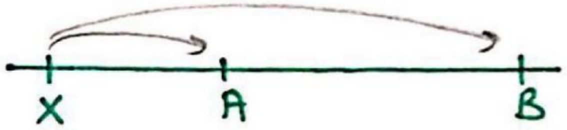
Çözüm:

$$(BC,A)=\frac{AB}{AC}=\frac{-5-2}{7-2}=-\frac{7}{5} \quad \text{olur.}$$



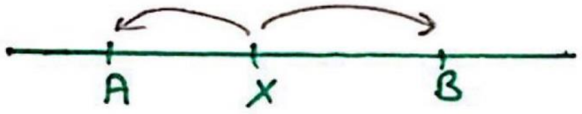
NOT: $A=(a)$, $B=(b)$, $X=(x)$ ve $(AB,X)=k$ olsun.

1) X, A nın solunda ise



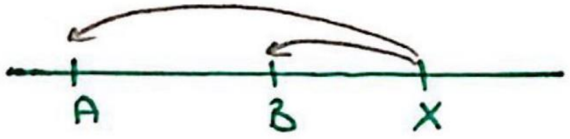
$0<k<1$ olur.

2) X, A ile B nin arasında ise



$k<0$ dır.

3) X, B nin sağında ise



$k>1$ dir.

$k>0$ ise k ya dıştan bölme oranı,

$k<0$ ise k ya içten bölme oranı adı verilir.

Çifte Oran

A,B,C,D doğrusal 4 nokta olsun. C nin AB doğru parçasını bölme oranının, D nin AB doğru parçasını bölme oranına bölümüne A,B,C,D noktalarının çifte oranı denir. (AB,CD) ile gösterilir.

Buna göre,

$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)}=\frac{\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}}{\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$$ dır.

Örnek: $A=(-1)$, $B=(3)$, $C=(4)$, $D=(2)$ için $(CB,DA)=?$

Çözüm:

$$(CB,DA)=\frac{(CB,D)}{(CB,A)}=\frac{\frac{4-2}{3-2}}{\frac{4-(-1)}{3-(-1)}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$$

Harmonik Oran

A, B, C, D doğrudaş 4 nokta olsun. Bu 4 noktanın çifte oranı -1 ise yani $(AB, CD) = -1$ ise bu orana harmonik oran denir.

A, B, C, D noktaları harmonik oran teşkil ediyorsa, C ve D noktaları AB doğru parçasını biri içten diğeri dıştan olmak üzere aynı oranda böler. A ile B ve C ile D ye birbirinin harmonik eşi denir.

Örnek: $A=(1)$, $B=(0)$, $C=(-4)$ ve $(BC,DA)=-1$ ise $D=?$

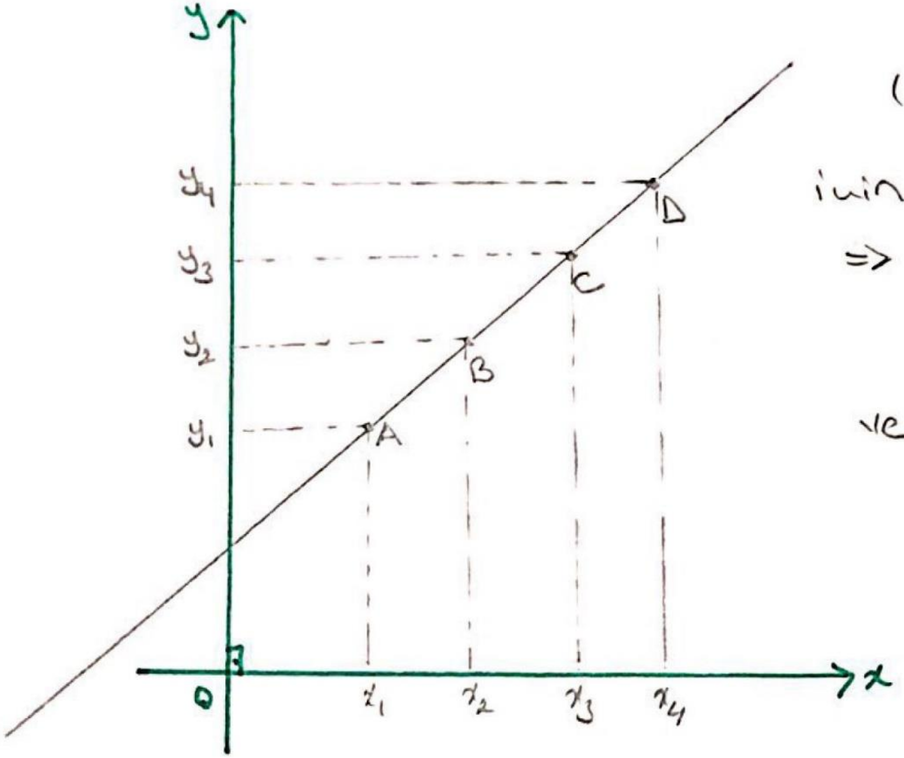
Çözüm:

$D=(d)$ olsun. $$(BC,DA)=\frac{(BC,D)}{(BC,A)}$$

$$=\frac{\frac{0-d}{-4-d}}{\frac{0-1}{-4-1}}=-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d+4}=-\frac{1}{5} \Rightarrow 5d=-d-4 \Rightarrow d=-2/3$$

NOT: Bu konuda söz konusu olan uzaklık yönlü uzaklıktır. Harmonik oranın 2-boyutlu uzayda karşılığı aşağıda verilmiştir:



$$(AB,CD) = \frac{(AB,C)}{(AB,D)} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = -1$$

için

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4} = -1$$

ve

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \cdot \frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_4} = -1$$ olur.

NOT: 3-boyutlu uzay içinde benzer durum söz konusudur. Orada bir de z ekseni boyunca yönlü uzaklık söz konusudur.

Örnek:

$$d \ldots \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 3t+1 \end{cases}$$

doğrusu üzerinde $A(2,0,1)$, $B(3,1,4)$ ve $C(1,-1,-2)$ noktaları veriliyor. B nin AC ye göre harmonik eşini bulunuz.

Çözüm: B nin AC ye göre harmonik eşi $D(d_1,d_2,d_3)$ olsun.

$$(AC,BD) = -1 \Rightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = -1$$

O halde,

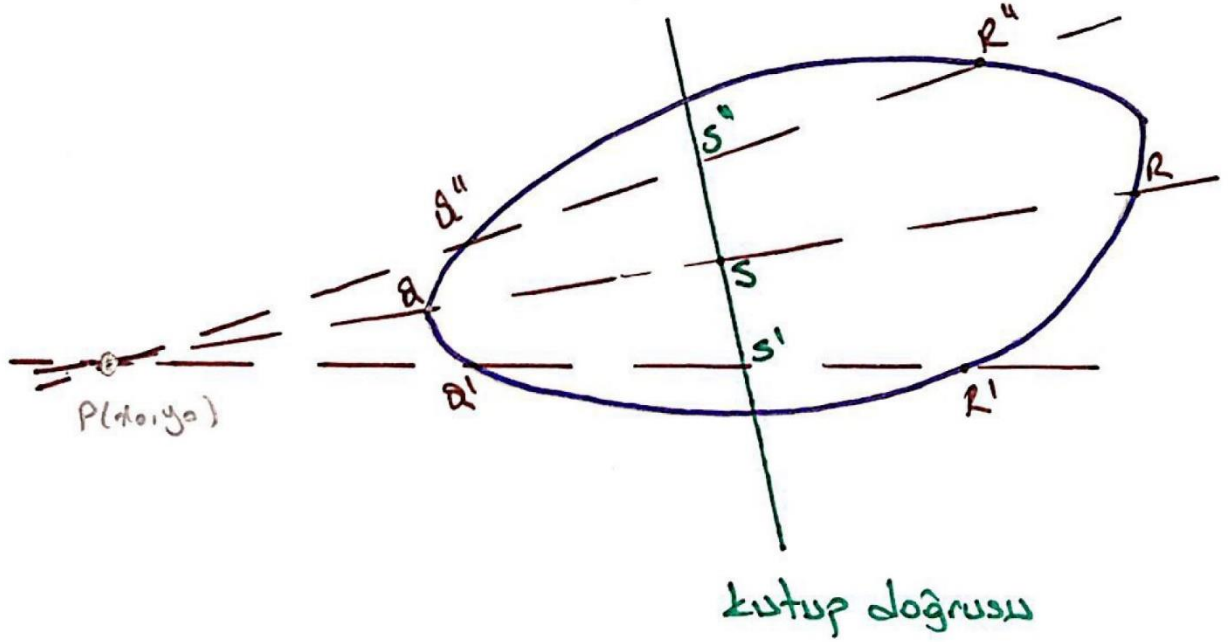
$$\frac{2-3}{1-3} \cdot \frac{1-d_1}{2-d_1} = -1 \Rightarrow d_1 = 5/3$$

$$\frac{-1}{-2} \cdot \frac{-1-d_2}{-d_2} = -1 \Rightarrow d_2 = -1/3$$

$$\frac{1-4}{-2-4} \cdot \frac{-2-d_3}{1-d_3} = -1 \Rightarrow d_3 = 0 \quad \Rightarrow D(5/3, -1/3, 0) \text{ olur.}$$

KUTUP NOKTASI VE KUTUP DOĞRUSU

M koniği ve $P \notin M$, $P=(x_0, y_0)$ noktası verilsin. P den geçen doğruların koniği kestiği noktalara Q ve R diyelim. Q ve R noktalarına göre P noktasının harmonik eşi olan noktaların geometrik yerine M koniğinin P noktasına göre **kutup doğrusu**, P noktasına da M nin **kutup noktası** denir.



$\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemi ile verilen koniğin bir P noktasına göre kutup doğrusu

$$\boxed{\phi_x\big|_P \cdot x + \phi_y\big|_P \cdot y + D\,x(P) + E\,y(P) + 2F = 0}$$

dır.

Örnek: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğinin $P(-1,3)$ noktasına göre kutup doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$\phi_x = 10x+6y-4 \Rightarrow \phi_x|_P = 4$$

$$\phi_y = 6x+10y+4 \Rightarrow \phi_y|_P = 28$$

$$\Rightarrow 4x+28y+(-4).(-1)+4.3-8=0$$

$$\Rightarrow 4x+28y+8=0$$

$$\Rightarrow x+7y+2=0$$

Örnek: $x^2+3xy+4y^2+2x-y=0$ koniğinin $P(1,-2)$ noktasına göre kutup doğrusunu bulunuz.

$$(x+7y-2=0)$$

Örnek: $x^2-xy-y^2+x+y-1=0$ koniğinin $x+2y+3=0$ kutup doğrusuna göre kutup noktasını bulunuz.

Çözüm:

Kutup noktası $P(x_0,y_0)$ olsun.

$\phi_x=2x-y+1$, $\phi_y=-x-2y+1$ olmak üzere kutup doğrusu,

$(2x_0-y_0+1)x+(-x_0-2y_0+1)y+x_0+y_0-2=0$ olur.

$$\Rightarrow \frac{2x_0-y_0+1}{1}=\frac{-x_0-2y_0+1}{2}=\frac{x_0+y_0-2}{3}$$ yazılabilir.

Buradan $x_0=-1/5$, $y_0=1$ bulunur.

$\Rightarrow P(-1/5,1)$ olur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 12