ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11

# KONİKLERDE TEĞET

## Bir Konik ile Bir Doğrunun Konumu

$\phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ denklemli M koniği ve $y=mx+n$ denklemli d doğrusu verilsin. M koniği ile d doğrusunun konumunu araştırmak demek, doğru ve konik denklemlerinin oluşturduğu sistemi ortak çözmek demektir:

$$Ax^2+Bx(mx+n)+C(mx+n)^2+Dx+E(mx+n)+F=0$$

$$\Rightarrow (Cm^2+Bm+A)x^2+(Bn+2mC+mE+D)x+Cn^2+En+F=0$$

olur. $x$ e göre 2. dereceden olan bu denklemin diskriminantı $\delta$ olmak üzere,

**1)** $\delta > 0$ ise denklemin iki reel kökü vardır. Yani d doğrusu M koniğini iki noktada keser.

**2)** $\delta = 0$ ise denklemin tek kökü vardır. O halde d doğrusu M koniğini tek noktada keser. Yani d doğrusu M koniğine teğettir.

**3)** $\delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Yani doğru koniği kesmez.

**Örnek:** $x^2 - xy + y^2 + 2x - y = 0$ koniği ile $y = 2x + 1$ doğrusunun birbirine göre durumunu araştırınız.

**Çözüm:**

$y = 2x + 1$ ifadesi konik denkleminde yerine yazılırsa,

$$x^2 - x(2x+1) + (2x+1)^2 + 2x - 2x - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $x^2 - x = 0$ bulunur.

$\delta = 1 > 0$ olup doğru koniği iki noktada keser.

$$x^2 - x = 0 \text{ dan } x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \,,\; x = 1$$

$\Rightarrow$ Doğru koniği $P(0,1)$ ve $Q(1,3)$ noktalarında keser.

## Koniğe Bir Noktadan Çizilen Teğetin Denkleminin Bulunması

$\Phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemli M koniği ve bir $P(x_1,y_1)$ noktası verilsin. P den geçen doğrular

$$d \ldots \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

şeklindedir. Şimdi M ile d doğrularının oluşturduğu sistemi çözelim:

$$Ax^2 + Bx(m(x-x_1)+y_1) + C(m(x-x_1)+y_1)^2 + Dx + E(m(x-x_1)+y_1) + F = 0$$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ şeklinde bir denklem elde edilir.

$\delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere, $\delta = 0$ ise doğru koniğe teğettir.

$\delta = 0$ denkleminde bilinmeyen m dir.

a) $\delta = 0$ için $m_1 \neq m_2$ ise P noktasından koniğe iki teğet çizilebilir.

b) $\delta = 0$ için $m_1 = m_2$ ise P den koniğe bir tek teğet çizilebilir. P noktası koniğin üzerindedir.

c) $\delta = 0$ için m değeri yoksa P den koniğe teğet çizilemez. P noktası koniğin içindedir.

**Örnek:** $x^2+4xy+4y^2+2x+1=0$ koniğine $P(-1,0)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemini bulunuz.

**Çözüm:**

P den geçen doğrular

$$d \ldots \quad y=m(x+1)$$

şeklindedir. Ortak çözüm yapılırsa,

$$x^2+4xm(x+1)+4m^2(x+1)^2+2x+1=0$$

$$\Rightarrow (4m^2+4m+1)x^2+(8m^2+4m+2)x+4m^2+1=0$$

Teğet olması için doğru ile koniğin tek ortak noktası olmalıdır.

$$\Rightarrow \Delta=(8m^2+4m+2)^2-4(4m^2+4m+1)(4m^2+1)=0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow 4m^2=0 \Rightarrow m=0 \text{ bulunur.}$$

O halde koniğe $P(-1,0)$ dan çizilen teğetin denklemi

$$y=0 \text{ dır.}$$

**Örnek:** $x^2+xy+4y^2-x-3y+1=0$ koniğine $P(1,0)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemlerini bulunuz.

**Çözüm:**

$P$ den geçen doğrular

$$d \ldots \quad y = m(x-1)$$

şeklindedir. Bu doğrular içinden koniğe teğet olanları arıyoruz.

Ortak çözüm yapılıp düzenlenirse

$(4m^2+m+1)x^2+(-8m^2-4m-1)x+4m^2+3m+1=0$ bulunur. Teğet olma şartından $\delta=(-8m^2-4m-1)^2-4(4m^2+m+1)(4m^2+3m+1)=0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \quad 12m^2+8m+3=0$$

bulunur. Bu denklemin kökü olmadığından $P$ noktasından koniğe teğet çizilemez.

**NOT:** $\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ koniğine üzerindeki bir $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğetin denklemi bulunurken türevin geometrik anlamını da kullanabiliriz:

Teğetin denklemi $y - y_1 = m_T(x - x_1)$ şeklinde olup burada,

$$m_T = -\left.\frac{\phi_x}{\phi_y}\right|_P$$

$$= -\left.\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}\right|_P$$

$$= -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E} \quad \text{dir.}$$

**Örnek:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin $P(x_1,y_1)$ noktasındaki teğetinin denkleminin,

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1$$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$$\phi(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad , \quad m_T=-\frac{\phi_x}{\phi_y}\Big|_P=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

$\Rightarrow$ Teğet, $\quad y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

$$\Rightarrow y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x+\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1^2}{y_1} \Rightarrow yy_1-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}x_1x+\frac{b^2}{a^2}x_1^2$$

P, elips üzerinde olduğundan, $\frac{x_1^2}{a^2}=1-\frac{y_1^2}{b^2}$ dir.

$$\Rightarrow yy_1-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}x_1x+b^2\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right) \Rightarrow yy_1=-\frac{b^2}{a^2}x_1x+b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1$$ bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11