ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

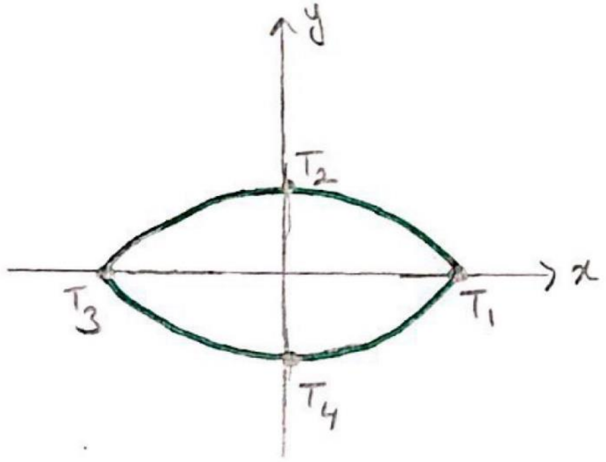
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

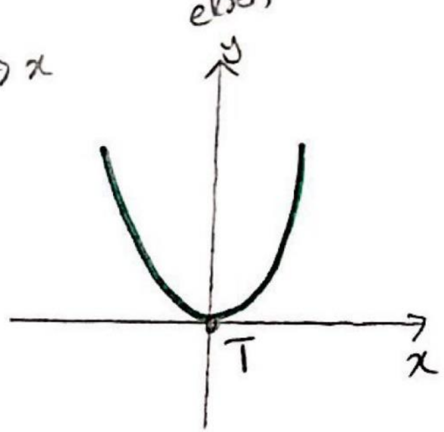
Ders 9

KONİKLERDE KÖŞE (TEPE) NOKTALARI

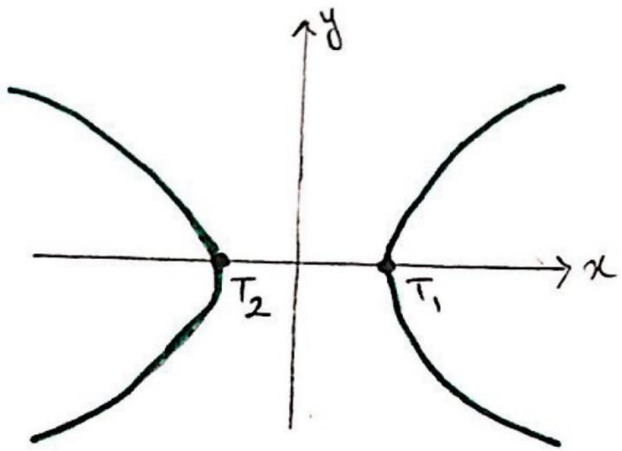
Bir koniğin eksenleri ile arakesit noktalarına koniğin tepe veya köşe noktaları denir. O halde bu noktaları bulmak için konik denklemi ile eksen denklemleri ortak çözülmelidir.



Elipste 4 tepe noktası vardır.



Parabolde tek tepe noktası vardır.



Hiperbolde 2 tepe noktası vardır.

Örnek: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğinin tepe noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$Bm^2+2(A-C)m-B=0$ dan $m=\mp 1$ asal doğrultulardır.

$m_1=1$ için eksen $\Phi_x+1\Phi_y=0$ dan $x+y=0$

$m_2=-1$ için eksen $\Phi_x+(-1)\Phi_y=0$ dan $x-y-2=0$ bulunur.

Koniğin reel elips olduğuna yani 4 tane tepe noktası bulmamız gerektiğine dikkat ediniz.

$$\begin{cases} 5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_1=1+\sqrt{2}$$

$x_2=1-\sqrt{2}$ olur.

$x_1=1+\sqrt{2}$ için $y_1=-1-\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$ için $y_2=-1+\sqrt{2}$ olur.

$\Rightarrow T_1(1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2})$, $T_2(1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ bulunur.

$$\begin{cases} 5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2y^2+4y+1=0$$

$$\Rightarrow y_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olur.}$$

$y_1=-1+\sqrt{2}/2$ için $x_1=1+\sqrt{2}/2$, $y_2=-1-\sqrt{2}/2$ için $x_2=1-\sqrt{2}/2$ bulunur.

$$\Rightarrow T_3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ T_4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ olur.}$$

Örnek:

$9x^2-24xy+16y^2-200x-150y=0$ koniğinin tepe noktalarını bulunuz.

Çözüm: $4AC-B^2=0$ olup konik paraboldür.

$Bm^2+2(A-C)m-B=0$ dan $m_1=-\frac{4}{3}$, $m_2=\frac{3}{4}$ asal doğrultulardır.

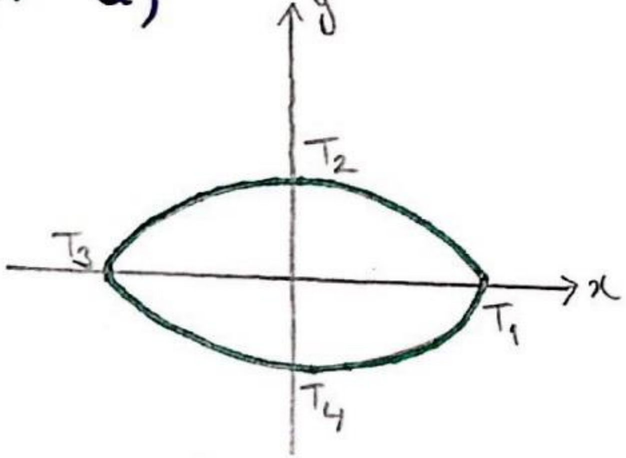
$m_1=-\frac{4}{3}$ için eksen $\phi_x+(-\frac{4}{3})\phi_y=0$ dan $3x-4y=0$

$m_2=\frac{3}{4}$ için eksen yoktur.

$$\begin{cases} 9x^2-24xy+16y^2-200x-150y=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow x=0 \text{ bulunur.}$$

$x=0$ için $y=0$ dır. O halde tepe noktası $T(0,0)$ olur.

Not: a)



Elipsin tepe noktaları T_1, T_2, T_3, T_4 olsun. $\|T_1T_3\|$ ve $\|T_2T_4\|$ uzunluklarına elipsin eksen uzunlukları denir. Eksen uzunluğu büyük olana asal eksen, diğerine de yedek eksen adı verilir.

Kısaca; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi için

$a>b \Rightarrow x$ ekseni asal, y ekseni yedek eksen

$a<b \Rightarrow y$ ekseni asal, x ekseni yedek eksendir.

b) Konik hiperbol ise tepe noktalarını üzerinde bulunduran eksene asal eksen, diğerine de yedek eksen denir.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünde x ekseni asal, y ekseni yedek eksendir.

$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünde y ekseni asal, x ekseni yedek eksendir.

c) $y=ax^2$ parabolünde y ekseni asal eksendir.

$x=by^2$ parabolünde x ekseni asal eksendir.

KONİKLERDE ASİMPTOT

Bir koniğin eşlenik doğrultusu ile aynı doğrultuya sahip doğrultularına koniğin asimptotik doğrultuları denir. Koniğin asimptotik doğrultusuna göre çap denklemine de koniğin asimptotu denir. Şimdi asimptotik doğrultuları veren bağıntıyı bulalım:
Eşlenik doğrultular arasında

$$2Cmm' + B(m+m') + 2A = 0$$

bağıntısının olduğunu biliyoruz. Asimptotik doğrultu tanımından $m = m'$ olacağından

$$\boxed{Cm^2 + Bm + A = 0}$$ (Asimptotik doğrultuları veren bağıntı)

bulunur. Bu denklemin kökleri m_1 ve m_2 olmak üzere koniğin asimptotları $\phi_x + m_1 \phi_y = 0$ ve $\phi_x + m_2 \phi_y = 0$ dır.

İrdeleme: $Cm^2+Bm+A=0$ denkleminin kökleri için

$$m_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2C}$$

olur.

1) Konik elips ise $4AC-B^2>0$ olup $B^2-4AC<0$ olacağından denklemin reel kökü yoktur. Yani elipste asimptot yoktur.

2) Konik hiperbol ise $4AC-B^2<0$ olup $B^2-4AC>0$ olacağından denklemin iki reel kökü vardır. Yani hiperbolde iki asimptot vardır.

3) Konik parabol ise $4AC-B^2=0$ olup denklemin çakışık tek kökü vardır. O halde parabolün tek asimptotu vardır. Bu asimptotun doğrultusu sonsuz olup parabolün ekseni ile çakışır.

Örnek: $2x^2+xy-3y^2+y-1=0$ koniğinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$$Cm^2+Bm+A=0 \text{ dan } 3m^2-m-2=0$$

$$\Rightarrow m_1=1 \quad , \quad m_2=-\frac{2}{3}$$

$m_1=1$ için $\phi_x+1\phi_y=0$ dan asimptot $5x-5y+1=0$ bulunur.

$m=-2/3$ için $\phi_x+(-\frac{2}{3})\phi_y=0$ dan asimptot $10x+15y-2=0$ bulunur.

Örnek:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünün asimptotlarının $y=\mp\frac{b}{a}x$

olduğunu gösteriniz.

Örnek: $4x^2-4xy+y^2-8x-8y+4=0$ koniğinin asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$4AC-B^2=0$ olup konik paraboldür.

$Cm^2+Bm+A=0$ dan $(m-2)^2=0$ $\Rightarrow$ $m=2$ bulunur.

$\Phi_x+2\Phi_y=0$ dan

$$8x-4y-8+2(-4x+2y-8)=0$$

$$\Rightarrow \quad -24=0$$

$\Rightarrow$ Asimptot yoktur.

Örnek: $3x^2-10xy+3y^2+x-3y-4=0$ koniğini merkezil hale getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=-64$ olup konik hiperboldür.

Koniğe önce öteleme işlemi uygulayalım: $O'(h,k)$ olmak üzere,

$$\phi_x|_{O'}=0,\ \phi_y|_{O'}=0 \text{ dan } \begin{array}{l} 6h-10k+1=0 \\ -10h+6k-3=0 \end{array} \Rightarrow h=-\frac{3}{8},\ k=-\frac{1}{8}$$

bulunur. O halde koniğin $x'O'y'$ deki denklemi,

$F'=\phi(h,k)=\phi\left(-\frac{3}{8},-\frac{1}{8}\right)=-4$ olmak üzere,

$3x'^2-10x'y'+3y'^2-4=0$ dır.

Şimdi de dönme işlemi uygulayalım:

$$\tan 2\alpha=\frac{-10}{3-3}=-\frac{10}{0} \Rightarrow 2\alpha=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{4} \text{ olur.}$$

O halde dönme denklemleri,

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \end{cases}$$ ve $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ olmak üzere,

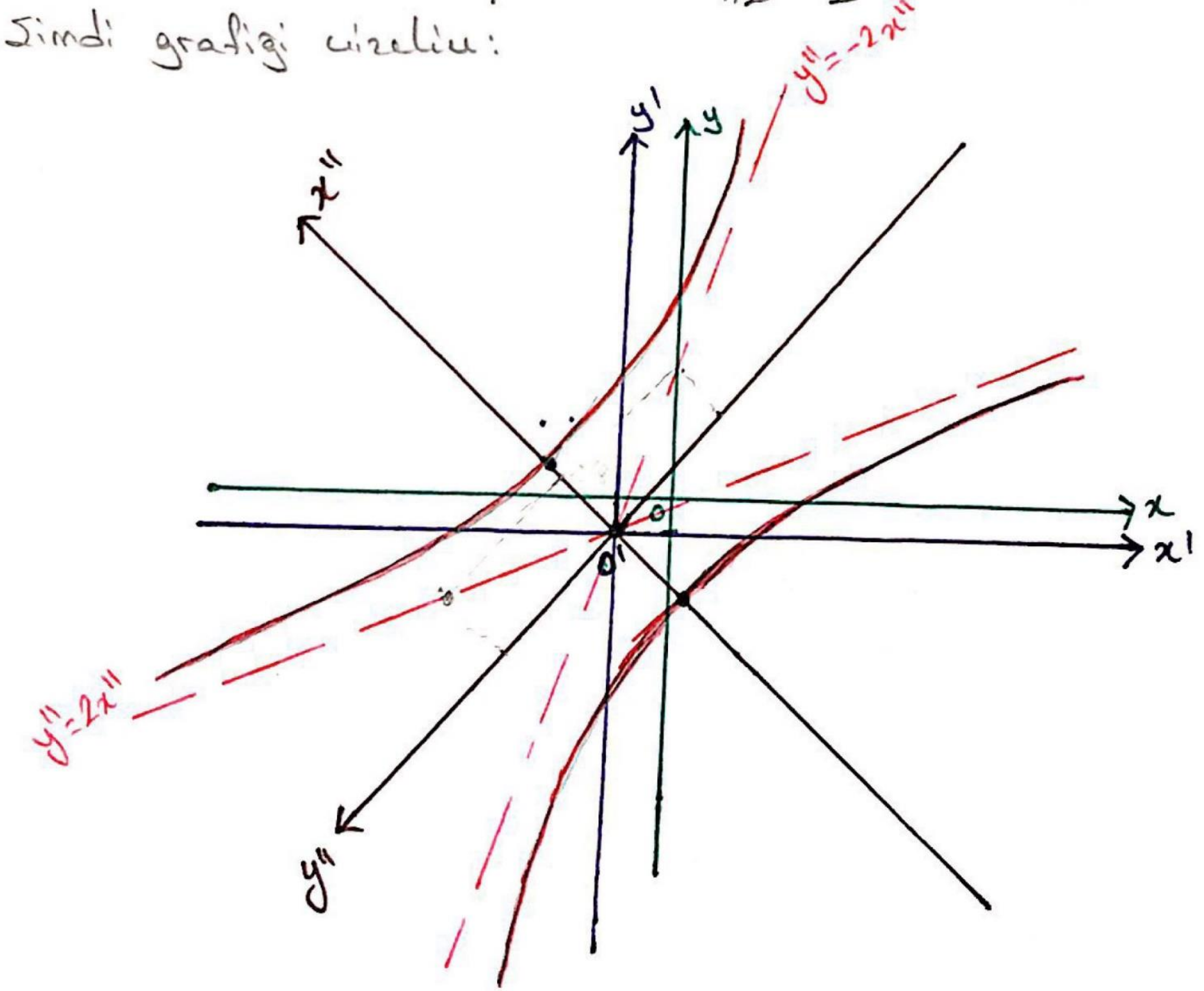
$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'') \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'') \end{cases}$$ olur. Bu denklemler

$3x'^2 - 10x'y' + 3y'^2 - 4 = 0$ da yerine yazılırsa koniğin $x''o'y''$ deki denklemi $\frac{x''^2}{1/2} - \frac{y''^2}{2} = 1$ bulunur.

Merkezil hiperbolün asimptotları $y = \mp \frac{b}{a}x$ olduğundan asimptotları $y'' = \mp 2x''$ olur.

$O'(-3/8, -1/8)$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ idi. $\frac{x''^2}{1/2} - \frac{y''^2}{2} = 1$, asimptotlar $y'' = \mp 2x''$

Şimdi grafiği çizelim:



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 9