



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8

## KONİKLERDE EKSEN

Koninin eşlenik doğrultularından dik olan doğrultularına koninin **asal doğrultuları** denir. Asal doğrultularının eşlenik uapına da koninin **ekseni** adı verilir.

Asal Doğrultuları Veren Bağntı:

Eşlenik doğrultular arasında

$$2Cmm' + B(m+m') + 2A = 0$$

bağntısının var olduğunu biliyoruz. Asal doğrultu tanımından

$mm' = -1$  olup  $m' = -1/m$  olur. Yukarıdaki eşitlikten

$$\boxed{Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0} \quad (\text{Asal doğrultuları veren bağıntı})$$

bulunur.

$$Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0 \text{ denkleminin köklere}$$
$$m_{1,2} = \frac{(C-A) \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B} \text{ dir.}$$

1)  $B \neq 0$  ise iki asal doğrultu vardır. Yani koninin iki eksenidir.

2)  $B = 0$  olsun.

a)  $A = C$  ise  $Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0$  denklemi  $\forall m \in \mathbb{R}$  için sağlanır. O halde çemberdeki her doğrultu asal doğrultudur. Çemberin sonsuz sayıda eksenidir.



b)  $A \neq C$  ise  $2(A-C)m = 0$  den  $m_1 = 0$  bulunur. Diğer doğrultu buna dik olduğundan  $m_2$  doğrultusunun eğim açısı  $\frac{\pi}{2}$  dir.  
( $m_2 = \infty$ )

$m_1=0$  için eksen,  $\phi_x + m\phi_y = 0$  dan  $\phi_x = 0$  dir.

$m_2 = \infty$  için eksen,  $\lambda_1 \phi_x + \lambda_2 \phi_y = 0$  denkleminde bu durum  $\lambda_1 = 0$  olması durumudur. Bu durumda eksen  $\phi_y = 0$  dir.

3) Konik parabol olsun. Bu durumda  $4AC - B^2 = 0$  dir.

$$m_{1,2} = \frac{C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B} \text{ den } m_1 = \frac{2C}{B}, m_2 = -\frac{2A}{B} \text{ elde edilir.}$$

Şimdi bu asal doğrultular için eksen denklemlerini yazalım:

$$\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$m_1 = \frac{2C}{B}$  için  $\phi_x + m_1 \phi_y = 0$  dan

$$2(A+C)x + \left(B + \frac{4C^2}{B}\right)y + D + \frac{2EC}{B} = 0$$

eksen denklemini buluruz.

$m_2 = -\frac{2A}{B}$  için  $\phi_x + m_2 \phi_y = 0$  dan

$$\left(\frac{B^2 - 4AC}{B}\right)y + D - \frac{2AE}{B} = 0 \Rightarrow \text{eksen yoktur.}$$

0 halde parabolde tek eksen vardır.

Örnek:  $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$  konisinin eksenlerini bulunuz.

Çözüm: Önce asal doğrultuları bulalım:

$$Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0 \text{ dan } m = \mp 1 \text{ bulunur.}$$

$$m = 1 \text{ için eksen: } \phi_x + 1\phi_y = 0 \text{ dan } x + y = 0$$

$$m = -1 \text{ için eksen: } \phi_x + (-1)\phi_y = 0 \text{ dan } x - y = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek:  $x^2 + 2xy + y^2 - x + 3 = 0$  konisinin eksenlerini bulunuz.

Çözüm:  $4AC - B^2 = 0$  olup konik parabolüdür.

Önce asal doğrultuları bulalım:

$$Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0 \text{ dan } m = \mp 1 \text{ dir.}$$

$$m = 1 \text{ için } \phi_x + 1\phi_y = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 1 + 2x + 2y = 0 \Rightarrow 4x + 4y - 1 = 0$$

$$m = -1 \text{ için } \phi_x + (-1)\phi_y = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 1 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow -1 = 0$$

0 halde tek eksen  $4x + 4y - 1 = 0$  dir.

Örnek:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  elipsinin eksenlerini bulunuz. ( $a \neq b$ )

Çözüm:  $Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0$  dan  $2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)m = 0$   
 $\Rightarrow m=0$  olur.

0 halde asal doğrultular  $m_1=0$  ve  $m_2=\infty$  olur.

$m_1=0$  için eksen  $\phi_x=0 \Rightarrow x=0$

$m_2=\infty$  için eksen  $\phi_y=0 \Rightarrow y=0$  dir.

Örnek:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  hiperbolünün eksenlerini bulunuz. ( $x=0, y=0$ )

Örnek:  $y=ax^2$  parabolünün eksenlerini bulunuz.

Çözüm:

$Bm^2 + 2(A-C)m - B = 0$  dan  $m=0$

0 halde asal doğrultular  $m=0$  ve  $m=\infty$  olur.

$m=0$  için eksen  $\phi_x=0 \Rightarrow x=0$ ,  $m=\infty$  için eksen  $\phi_y=0 \Rightarrow -1=0$

Örnek:  $x^2 + xy + y^2 + x - 1 = 0$  kordinatlarının eksenlerini bulunuz.



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



8

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 8