ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

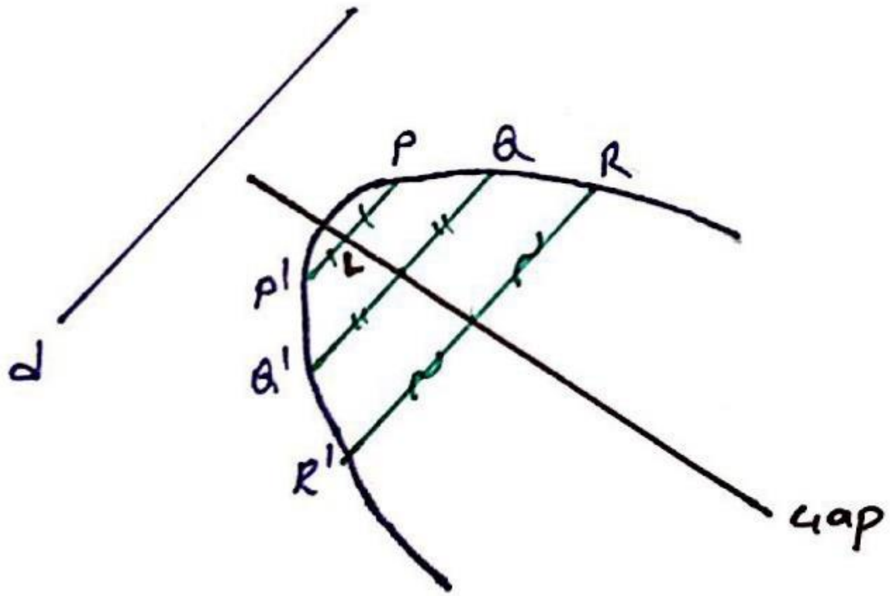
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

KONİKLERDE ÇAP (KÖŞEGEN)

$\Phi(x,y)=0$ koniği ve d doğrusu verilsin. Koniğin d doğrusuna paralel olan kirişlerinin orta noktalarının geometrik yerine koniğin eşlenik çapı veya köşegeni adı verilir.



Koniklerde Çapın Bulunması

$\phi(x,y)=0$ koniği ve $d \dots\ y=mx+n$ doğrusu verilsin. Çapa ait nokta $L(x_0,y_0)$ olsun. L den geçen ve d doğrusuna paralel olan kirişin denklemi $y-y_0=m(x-x_0)$ olur. Kiriş ile koniğin ortak noktaları olan $P(x_1,y_1)$ ve $P'(x_2,y_2)$ noktalarını bulmak için kiriş ve konik denklemi ortak çözülür:

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \\ \qquad\qquad y-y_0=m(x-x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (Cm^2+Bm+A)x^2+(By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+mE+D)x$$
$$+\,Cy_0^2+Cm^2x_0^2+Ey_0-mEx_0+F=0$$

bulunur. Bu denklemin kökleri P ve P'nün apsislerini yani x_1 ve x_2 yi verir.

L , PP' nün orta noktası olacağından,

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{By_0 - Bmx_0 + 2mCy_0 - 2m^2Cx_0 + mE + D}{2(Cm^2+Bm+A)}$$

Bu denklem düzenlenirse

$$(2A+mB)x_0 + (B+2mC)y_0 + mE + D = 0 \quad \dots (*)$$

bulunur. Bu x_0 ve y_0 a göre 1. dereceden bir denklem olup bir doğru belirtir. O halde uap bir doğrudur. Denklem düzenlenirse

$$2Ax_0 + By_0 + D + m(Bx_0 + 2Cy_0 + E) = 0 \quad \dots (**)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_x\big|_L + m\,\phi_y\big|_L = 0} \rightarrow \text{uapın denklemi}$$

elde edilir.

Not: $\Phi_x|_L + m\Phi_y|_L = 0$ çap denklemindeki m nin çapın eğimi olmadığına, çapı bulmada kullanılan d doğrusunun eğimi olduğuna dikkat ediniz.

Çapın Eğimi ile d Doğrusunun Eğimi Arasındaki Bağıntı

$$(2A+mB)x_0 + (B+2mC)y_0 + mE + D = 0 \quad \ldots (*)$$

çap denkleminden

$$y_0 = -\frac{2A+mB}{B+2mC}x_0 - \frac{mE+D}{B+2mC}$$

yazılabilir. O halde çapın eğimi m' olmak üzere

$$m' = -\frac{2A+mB}{B+2mC} \quad \text{dir.}$$

$$\boxed{(m+m')B + 2Cmm' + 2A = 0}$$

Çapın eğimi ile d doğrusunun eğimi arasındaki bağıntı.

bulunur. Eğimleri m ve m' olan doğrultulara **eşlenik doğrultular** denir.

Teorem: Merkezli koniklerde bütün çaplar merkezden geçer. Tersine, merkezden geçen her doğru çaptır.

İspat:

(⇒) $\phi(x,y)=0$ koniği ve bu koniğin $\phi_x|_L + m\,\phi_y|_L = 0$ çapı verilsin. $M(x_0,y_0)$ noktası koniğin merkezi olmak üzere

$$\phi_x|_M = 0 \quad \text{ve} \quad \phi_y|_M = 0$$

$$\Rightarrow \phi_x|_M + m\,\phi_y|_M = 0 \quad \text{olur.}$$

Bu ise M noktasının çap denklemini sağlaması demektir. O halde bütün çaplar merkezden geçer.

(⇐) $M(x_0,y_0)$ merkezinden geçen her doğrunun çap olduğunu gösterelim. M merkez olduğundan $\phi_x|_M=0$ ve $\phi_y|_M=0$ dır.

$\phi_x|_M = 0 \Rightarrow 2Ax_0 + By_0 + C = 0$, $\phi_y|_M = 0 \Rightarrow Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0$
bulunur. O halde

$$d_1 \ldots 2Ax + By + C = 0$$
$$d_2 \ldots Bx + 2Cy + E = 0$$

doğrularını alırsak, d_1 ve d_2 M den geçen iki doğrudur.
O halde M den geçen tüm doğruların (doğru demetinin) denklemi

$$\lambda_1(2Ax + By + C) + \lambda_2(Bx + 2Cy + E) = 0$$

$M \in d_1$ ve $M \in d_2$ olduğundan,

$$\lambda_1(2Ax_0 + By_0 + C) + \lambda_2(Bx_0 + 2Cy_0 + E) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \phi_x|_M + \lambda_2 \phi_y|_M = 0$$

$\lambda_1 \neq 0$ için $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = m$ alınırsa $\phi_x|_M + m\phi_y|_M = 0$ bulunur.

Bu son denklem M den geçen doğru denklemidir. Aynı zamanda çaptır.
O halde, merkezden geçen her doğru çaptır

Örnek: $4x^2-10xy+4y^2-4x-4y+1=0$ koniği veriliyor.

a) $m=3$ doğrultusuna eşlenik çapını bulunuz.

b) $x-y+3=0$ doğrusuna paralel çapını bulunuz.

c) $2x-y+3=0$ doğrusuna dik çapını bulunuz.

d) Orta noktası $P(-1,1)$ olan kirişin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\phi_x = 8x-10y-4 \quad , \phi_y = -10x+8y-4$$

a) $\phi_x + m\phi_y = 0 \Rightarrow (8x-10y-4)+3(-10x+8y-4)=0 \Rightarrow 11x-7y+8=0$

b) $x-y+3=0$ doğrusunun eğimi 1 dir. O halde çapın eğimi de $m'=1$ olur. m ile m' arasındaki bağıntı,

$$(m+m')B+2Cmm'+2A=0$$

$$\Rightarrow (m+1)(-10)+2.4.m+2.4=0 \Rightarrow m=-1$$

$\phi_x + m\phi_y = 0 \Rightarrow x-y=0$ olur.

c) $2x-y+3=0$ doğrusuna dik çapının denklemini bulalım:

$2x-y+3=0$ doğrusunun eğimi 2 olup çapın eğimi $m'=-\frac{1}{2}$ dir.

$$(m+m')B+2Cmm'+2A=0$$

$$\Rightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right).(-10)+2.4.\left(-\frac{1}{2}\right)m+2.4=0 \Rightarrow m=\frac{13}{14}$$

$$\Rightarrow \phi_x+m\phi_y=0 \Rightarrow (8x-10y-4)+\frac{13}{14}(-10x+8y-4)=0$$

$$\Rightarrow x+2y+6=0 \text{ bulunur.}$$

d) Orta noktası $P(-1,1)$ olan kirişin denklemini bulalım.

Çap denklemi $\phi_x+m\phi_y=0$

$$\Rightarrow (8x-10y-4)+m(-10x+8y-4)=0$$

P, çapın üzerinde olacağından denklemi sağlar.

$$\Rightarrow m=\frac{11}{7}$$

O halde kirişin denklemi, $y-1=\frac{11}{7}(x+1) \Rightarrow 11x-7y+18=0$ olur.

Örnek: $x^2+3xy-y^2+5x-1=0$ koniğinin $P(2,3)$ noktasından geçen çapının denklemini bulunuz.

Çözüm:

$4AC-B^2=-13<0$ olup konik hiperboldür. O halde merkeze sahiptir. Koniğin merkezini bulalım: $(K\neq 0)$

$$\Phi_x|_M=0 \Rightarrow 2x_0+3y_0+5=0$$

$$\Phi_x|_M=0 \Rightarrow 3x_0-2y_0=0 \qquad \Rightarrow x_0=-\frac{10}{13},\ y_0=-\frac{15}{13}$$

$\Rightarrow M\left(-\frac{10}{13},-\frac{15}{13}\right)$ olur. Çap merkezden geçeceğinden M ve P den geçen doğrunun denklemi çapın denklemi olacaktır.

$$\Rightarrow 3x-2y=0 \text{ bulunur.}$$

II. yol:

Koniğin merkezi $M(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$\phi_x|_M = 0 \Rightarrow 2x_0 + 3y_0 - 5 = 0$$

$$\phi_y|_M = 0 \Rightarrow 3x_0 - 2y_0 = 0$$

olur. O halde M merkezinden geçen iki doğru

$$d_1 \dots 2x + 3y - 5 = 0 \quad , \quad d_2 \dots 3x - 2y = 0 \text{ dır.}$$

M den geçen tüm doğruların denklemi,

$$\lambda_1(2x + 3y - 5) + \lambda_2(3x - 2y) = 0$$

Bu doğrulardan $P(2,3)$ den geçeni arıyoruz.

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2y = 0 \text{ bulunur.}$$

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 7