ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 6

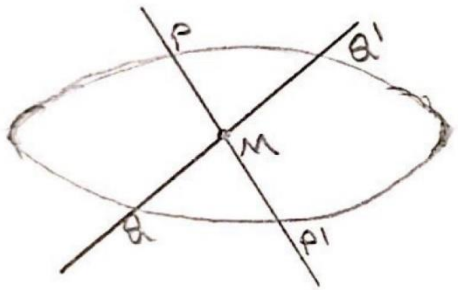
KONİKLERİN ELEMANLARI

Bu kısımda, $\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi ile verilen koniğin aşağıda belirtilen elemanlarını inceleyeceğiz:

1) Merkez
2) Çap (köşegen)
3) Eksen ve tepe (köşe) noktaları
4) Asimptot
5) Odak ve doğrultman
6) Kutup noktası ve kutup doğrusu

KONİKLERDE MERKEZ

$M(x_0, y_0)$ noktasından geçen her doğru koniği bu M noktasına göre simetrik iki noktada kesiyorsa M ye koniğin merkezi denir.



Koniğin Merkezinin Bulunması

$\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ koniği verilsin. Koniğin merkezine $M(x_0, y_0)$ diyelim. Şimdi M noktasını bulmaya çalışalım:

M den geçen ve eğimi m olan herhangi bir doğru

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \forall m \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

Şimdi, doğru ile koniğin arakesit noktalarını araştıralım.
Bunun için

$$\Phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

denklemlerini ortak çözmeliyiz. Ortak çözüm yapılırsa,

$$(Cm^2 + Bm + A)x^2 + (By_0 - Bmx_0 + 2mCy_0 - 2m^2Cx_0 + Em + D)x$$
$$+ Cy_0^2 - 2Cx_0y_0 + Cm^2x_0^2 + Ey_0 - Emx_0 + F = 0$$

bulunur.

x e göre 2. dereceden olan bu denklemin kökleri doğrunun koniği kestiği noktaların apsisidir. Bu arakesit noktaları P ve Q ile gösterilirse M, P ile Q nun orta noktası olur.

$M(x_0, y_0)$ olmak üzere $\quad x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$ dır.

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{By_0 - Bmx_0 + 2mCy_0 - 2m^2Cx_0 + Em + D}{2(Cm^2 + Bm + A)}$$

$$\Rightarrow (2A + Bm)x_0 + (B + 2mC)y_0 + mE + D = 0 \ \dots (*)$$

$$\Rightarrow (2Ax_0 + By_0 + D) + m(2Cy_0 + Bx_0 + E) = 0 \ \dots (**)$$

bulunur. Bu ifade $\forall m \in \mathbb{R}$ için doğru olduğundan

$$2Ax_0 + By_0 + D = 0 \quad \text{ve} \quad 2Cy_0 + Bx_0 + E = 0 \quad \text{olur.}$$

($\forall m$ için $a + bm = 0$ ise $a = b = 0$ dır. Çünkü $m = 0$ için $a = 0$, $m = 1$ için $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$ olur)

$$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0 \end{cases} \dots (***)$$

sistemi çözülerek $M(x_0, y_0)$ bulunur. Sistemin tek çözümünün olması için $\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2 \neq 0$ olmalıdır.

Sonuç: Konik elips veya hiperbol ise merkez tektir. Konik parabol ise ya merkez yoktur ya da sonsuz sayıdadır.

Normalde parabolün merkezi yoktur. Paralel veya çakışık bir çift doğru için merkez sonsuz sayıdadır.

Teorem: $M(x_0, y_0)$ noktasının $\phi(x,y)=0$ koniğinin merkezi olması için gerek ve yeter şart, $\phi_x|_M = 0$ ve $\phi_y|_M = 0$ olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$) $M(x_0,y_0)$ noktası koniğin merkezi olsun. Bu durumda yukarıda açıklandığı gibi

$$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad \text{dır.}$$

$\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} \phi_x = 2Ax + By + D \Rightarrow \phi_x|_M = 2Ax_0 + By_0 + D \\ \phi_y = Bx + 2Cy + E \Rightarrow \phi_y|_M = Bx_0 + 2Cy_0 + E \end{array}\right\} \Rightarrow \phi_x|_M = 0,\ \phi_y|_M = 0.$$

(⇐) $\phi_x|_M=0$ ve $\phi_y|_M=0$ olsun. $M(x_0,y_0)$ noktasının koniğin merkezi olduğunu gösterelim. Bunun için M den geçen her doğrunun koniği M ye göre simetrik iki noktada kestiğini göstermeliyiz.

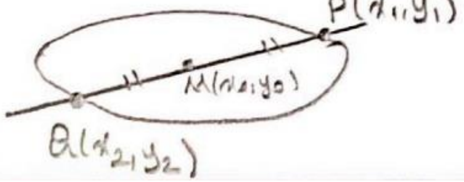
$\phi_x|_M=0$ ve $\phi_y|_M=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2Ax_0+By_0+D&=0 \\ Bx_0+2Cy_0+E&=0 \end{aligned} \quad \cdots(1)$$

dır. M den geçen tüm doğrular $\forall m\in\mathbb{R}$ için $y-y_0=m(x-x_0)$ şeklindedir. Bu doğrular ile konik denklemi ortak çözülürse

$$(Cm^2+Bm+A)x^2+(By_0-Bmx_0+2mCy_0-2m^2Cx_0+Em+D)\,x$$
$$+\,Cy_0^2-2Cx_0y_0+Cm^2x_0^2+Ey_0-Emx_0+F=0$$

olur. M nin merkez olduğunu göstermek için yukarıdaki denklemin x_1 ve x_2 olmak üzere, $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ ve $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ olduğunu göstermeliyiz.



$$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{\overbrace{By_0+D}^{-2Ax_0\ ((1)\text{den})} - mBx_0 + m(\overbrace{2Cy_0+E}^{-Bx_0\ ((1)\text{den})}) - 2m^2Cx_0}{2(Cm^2+Bm+A)}$$

$$= -\frac{-2x_0\,(Cm^2+Bm+A)}{2(Cm^2+Bm+A)}$$

$= x_0$ olur.

$\frac{y_1+y_2}{2} \overset{?}{=} y_0$ $\qquad$ $y_1 = y_0 + m(x_1 - x_0)$ ve $y_2 = y_0 + m(x_2 - x_0)$ olduğundan

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y_0 + mx_1 - mx_0 + y_0 + mx_2 - mx_0}{2}$$

$$= \frac{2y_0 + m(\overbrace{x_1+x_2}^{2x_0}) - 2mx_0}{2}$$

$= y_0$ bulunur.

Sonuç: $\phi(x,y)$ koniğinin $M(x_0,y_0)$ merkezini bulmak için

$\phi_x|_M = 0$ ve $\phi_y|_M = 0$ denklemleri çözülerek x_0 ve y_0 bulunur.

Örnek:

$\phi(x,y) = 3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 3y = 0$ koniğinin merkezini bulunuz.

Çözüm:

Koniğin merkezi $M(x_0,y_0)$ olsun.

$$\phi_x = 6x - 10y + 1 \Rightarrow \phi_x|_M = 6x_0 - 10y_0 + 1 = 0$$

$$\phi_y = -10x + 6y - 3 \Rightarrow \phi_y|_M = -10x_0 + 6y_0 - 3 = 0$$

$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ bulunur.

Örnek: $x^2+2xy+\lambda y^2+2x-4y+1=0$ konik ailesi veriliyor.

a) Ailedeki koniklerin çeşidini λ ya göre belirleyiniz. Ailede parabol, çember ve ikizkenar hiperbol varsa denklemlerini bulunuz.

b) Ailedeki koniklerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm:

b) Koniklerin merkezi $M(x_0, y_0)$ olsun.

$$\phi_x|_M=0 \text{ ve } \phi_y|_M=0 \text{ dan}$$

$$\begin{cases} x_0+y_0=-1 \\ x_0+\lambda y_0=2 \end{cases}$$ bulunur.

$\Rightarrow x_0=\dfrac{\lambda+2}{1-\lambda}$, $y_0=\dfrac{-3}{1-\lambda}$ elde edilir.

$\lambda=\dfrac{3+y_0}{y_0}$ olmak üzere $x_0=\dfrac{y_0+1}{-1} \Rightarrow x_0+y_0+1=0$

O halde ailedeki koniklerin merkezleri $x_0+y_0+1=0$ denklemini yani $x+y+1=0$ denklemini sağlar. Bu ise bir doğru denklemidir.

Yani ailedeki koniklerin merkezleri bir doğru üzerindedir.

Örnek: $\lambda^2x^2 - xy + y^2 + x - 3y = 0$ konik ailesindeki koniklerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: Ailedeki koniklerin merkezi $M(x,y)$ olsun.

$\phi_x|_M = 0$ ve $\phi_y|_M = 0$ dan

$$\begin{cases} 2\lambda^2 x - y + 1 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$ bulunur.

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{4\lambda^2 - 1}$, $y = \dfrac{6\lambda^2 - 1}{4\lambda^2 - 1}$ olur.

$\lambda^2 = \dfrac{x+1}{4x}$ ifadesi y de yerine yazılırsa $2x - y + 6 = 0$ bulunur. O halde ailedeki koniklerin merkezleri $2x - y + 6 = 0$ denklemini sağlarlar. Yani merkezler bir doğru üzerindedir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 6