ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4

Örnek: $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

İlk olarak dönme işlemi uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{6}{5-5} = \frac{6}{0} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

dönme denklemini konik denkleminde yerine yazarsak xoy sisteminin $\alpha = \frac{\pi}{4}$ kadar döndürülmesiyle elde edilen $x'oy'$ sisteminde koniğin denklemini bulmuş oluruz:

$\Rightarrow 8x'^2 + 2y'^2 + 4\sqrt{2}\,y' - 4 = 0$ bulunur. Şimdi de bu denkleme öteleme işlemini uygulayalım. Yani $x'oy'$ sisteminin O orijinini $O'(h,k)$ noktasına taşıyıp yeni oluşan $x''o'y''$ sisteminde koniği yazalım. Ayrıca, h ve k yı öyle seçelim ki koniğin son denkleminde 1. dereceden terimler yer almasın.

$$\begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases}$$

ötelemesini konik denklemine uygularsak,

$$8x''^2 + 2y''^2 + \underbrace{16h}_{0}\,x'' + \underbrace{(4k + 4\sqrt{2})}_{0}\,y'' + (8h^2 + 2k^2 + 4\sqrt{2}k - 4) = 0$$

bulunur.

O halde $h = 0$, $k = -\sqrt{2}$ alınırsa 1. dereceden terimler yok olur. Böylece koniğin denklemi,

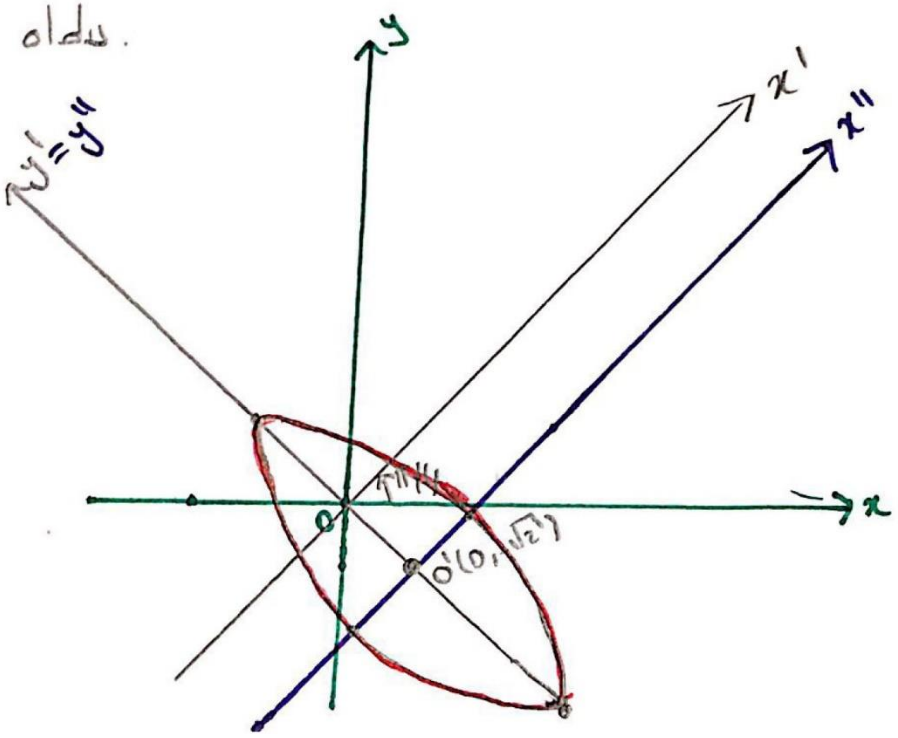
$$8x''^2 + 2y''^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{x''^2}{5/2} + \frac{y''^2}{10} = 1 \text{ olur.}$$

Koniğin xoy deki denklemi : $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$

xoy sistemini O etrafında $\alpha=\frac{\pi}{4}$ kadar döndürüp $x'oy'$ sistemini elde ettik. Koniğin bu sistemdeki denklemi $8x'^2+2y'^2+4\sqrt{2}y'-4=0$ oldu $x'oy'$ sistemini $x=x'$, $y=y'-\sqrt{2}$ ötelemesi ile $x''o'y''$ sistemine taşıdık. Koniğin bu sistemdeki denklemi

$$\frac{x''^2}{5/2}+\frac{y''^2}{10}=1$$ oldu.

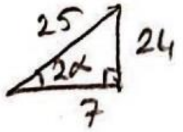


Örnek $16x^2+24xy+9y^2-30x+40y=0$ koniğini merkezil hale getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Önce dönme işlemi uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{24}{7}$$



2α açısı ya 1. ya da 3. bölgededir. Biz 1. bölgede alalım. Bu durumda α açısı da 1. bölgede olacaktır.

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \quad \cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ den $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ bulunur.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ dan $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ olur.

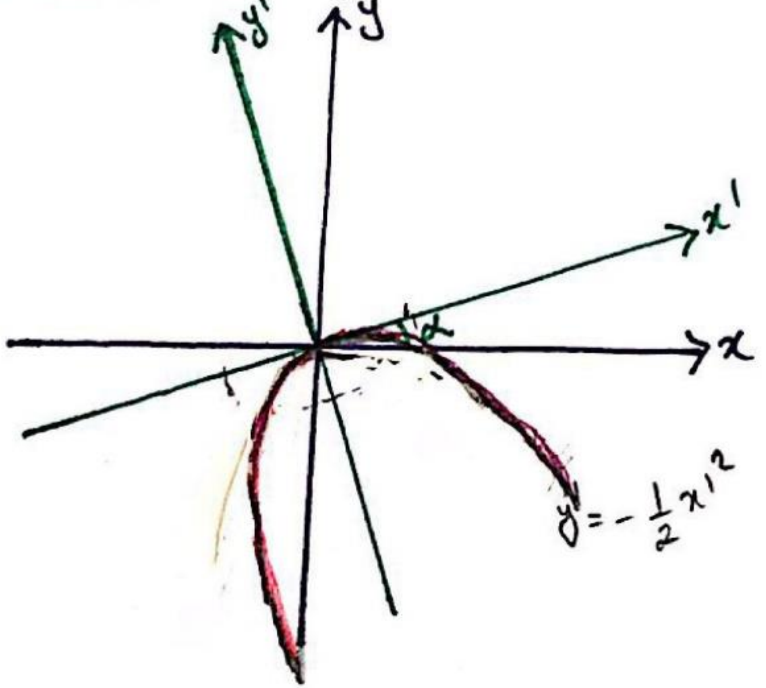
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \\ y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(4x' - 3y') \\ y = \frac{1}{5}(3x' + 4y') \end{cases}$$

Bu ifadeler $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$ konik denkleminde yerine yazılırsa

$$25x'^2 + 50y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x'^2$$ elde edilir.

(Ötelemeye gerek kalmadı)



Örnek: $2xy - x - y + 4 = 0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Önce öteleme işlemi uygulayalım:

$$\phi_x = 2y - 1 \Rightarrow \phi_x(h,k) = 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$

$$\phi_y = 2x - 1 \Rightarrow \phi_y(h,k) = 2h - 1 = 0 \Rightarrow h = 1/2$$

O halde öteleme, $\begin{cases} x = x' + 1/2 \\ y = y' + 1/2 \end{cases}$ olur.

$$F' = \phi(h,k) = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

O halde koniğin $x'O'y'$ deki denklemi $2x'y' + \frac{7}{2} = 0$ dır.

Şimdi dönme işlemini uygulayalım:

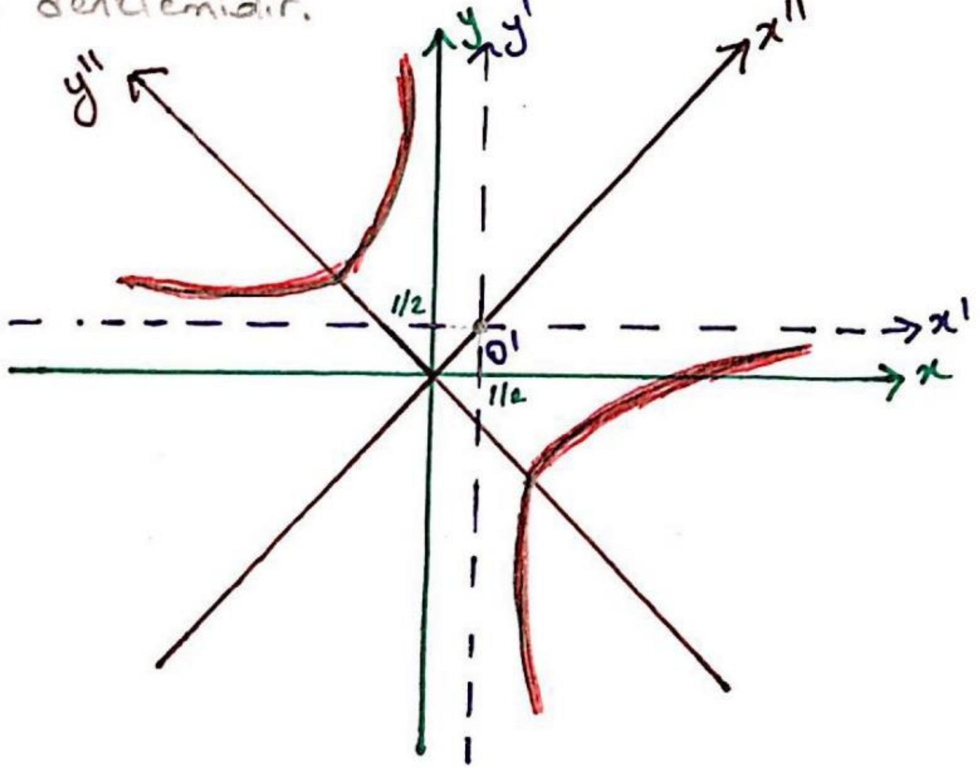
$$\tan 2\alpha = \frac{2}{0-0} = \frac{2}{0} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \end{cases}$$ dönme denklemi elde edilir. Bu denklem

Koniğin son denkleminde yazılırsa, $2x'y' + \frac{7}{2} = 0$ dan

$-\frac{x''^2}{7/2} + \frac{y''^2}{7/2} = 1$ elde edilir. Bu denklem koniğin $x''o'y''$ deki denklemidir.

$\left[O'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ ve } \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$



Uyarı: Konik parabol ise yani $4AC-B^2=0$ ise (ileride açıklanacak) öteleme için kısmi türev kullanılmadığını biliyoruz. Bu şekildeki denklemlere öteleme işlemi uygulandığında 1. dereceden terimlerin (x ve y li) her ikisi de yok olmaz. Bu durumda bu terimlerden birisi ve sabiti yok edecek şekilde bir öteleme aranır. (Çünkü asıl amaç konik denkleminin sade hale getirilmesidir. Örneğin; $\phi(x,y)=0$ koniğine $x=x'+h,\ y=y'+k$ ötelemesi uygulandığında koniğin $x'o'y'$ deki denklemi,

$$x'^2-2x'y'+y'^2+(h+1)x'+\sqrt{2}\,y'+(h^2-2k+1)=0$$

olsun. Bu durumda $h+1=0$ ve $h^2-2k+1=0$ olan h ve k değerleri bulunur. Yani 1. dereceden terimler yok edilemiyorsa bu terimlerden biri ve sabit yok edilir.

Örnek: $x^2-2xy+y^2+4x+8y+10=0$ koniğini standart forma getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=0$ dır. Önce dönme işlemini uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = -\frac{2}{0}$$

olup yukarıdaki koşulu sağlayan $2\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$ olur.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \end{cases} \text{ olur.}$$

Bu eşitlikler konik denkleminde yazılırsa koniğin xoy sistemini O etrafında $\frac{3\pi}{4}$ kadar döndürülmesiyle elde edilen $x'oy'$ deki denklemi

$$2x'^2+2\sqrt{2}\,x'-6\sqrt{2}\,y'+10=0 \text{ bulunur.}$$

Şimdi de $x'oy'$ sistemini $\begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases}$ ötelemesiyle $x''o'y''$

sistemine öteleyelim. Koniğin yeni sistemdeki denklemini yazalım:

$$2x'^2 + 2\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2x''^2 + (\underbrace{4h + 2\sqrt{2}}_{0})x'' - 6\sqrt{2}y'' + (\underbrace{2h^2 + 2\sqrt{2}h - 6\sqrt{2}k + 10}_{0}) = 0 \text{ olur.}$$

$4h + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow h = -\sqrt{2}/2$, $2h^2 + 2\sqrt{2}h - 6\sqrt{2}k + 10 = 0 \Rightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ olur.

O halde koniğin $x''o'y''$ deki denklemi

$$2x''^2 - 6\sqrt{2}y'' = 0$$

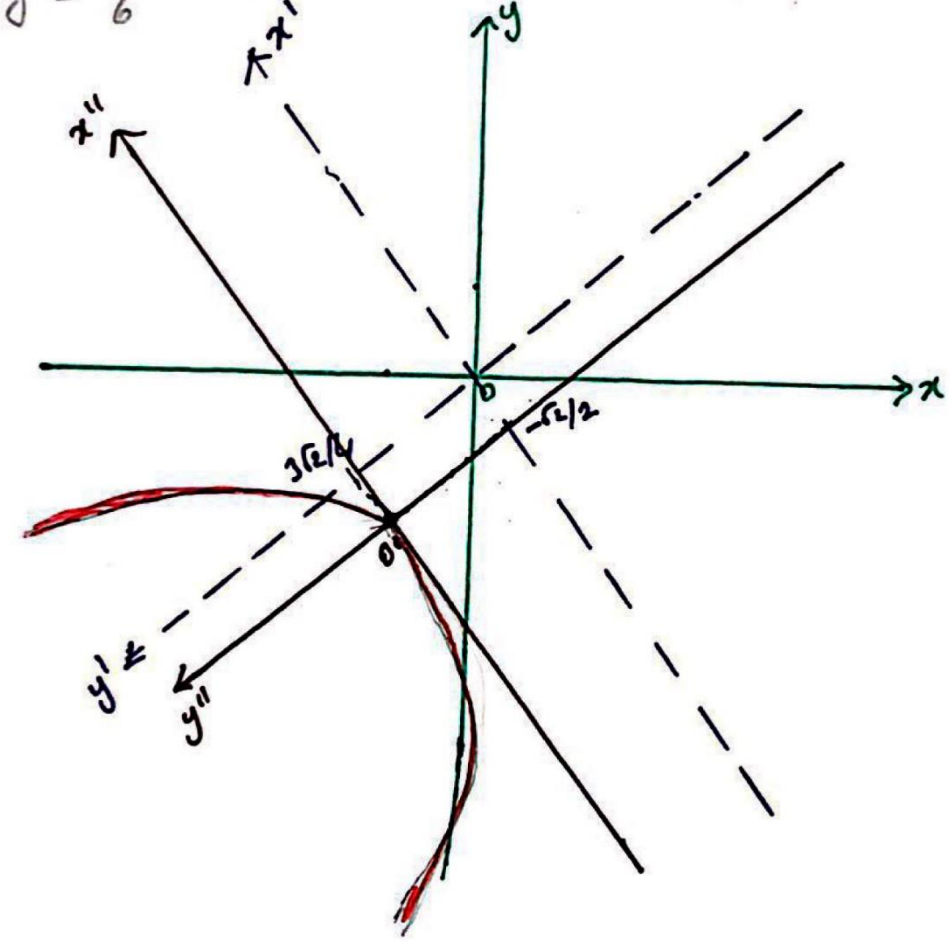
$$\Rightarrow y'' = \frac{\sqrt{2}}{6}x''^2 \quad \text{bulunur.}$$

$\Rightarrow$ xoy deki denklem : $x^2-2xy+y^2+4x+8y+10=0$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}$ dönme ile elde edilen $x'oy'$ deki denklem : $2x'^2+2\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+10=0$

$O'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ noktasına yapılan ötelemeyle elde edilen $x''o'y''$ deki

denklem : $y''=\frac{\sqrt{2}}{6}x''^2$.



Örnek: $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2\neq 0$ dır. Öteleme işlemi uygulayalım:

$\phi_x = 2x-4 \Rightarrow \phi_x(h,k) = 2h-4=0 \Rightarrow h=2$

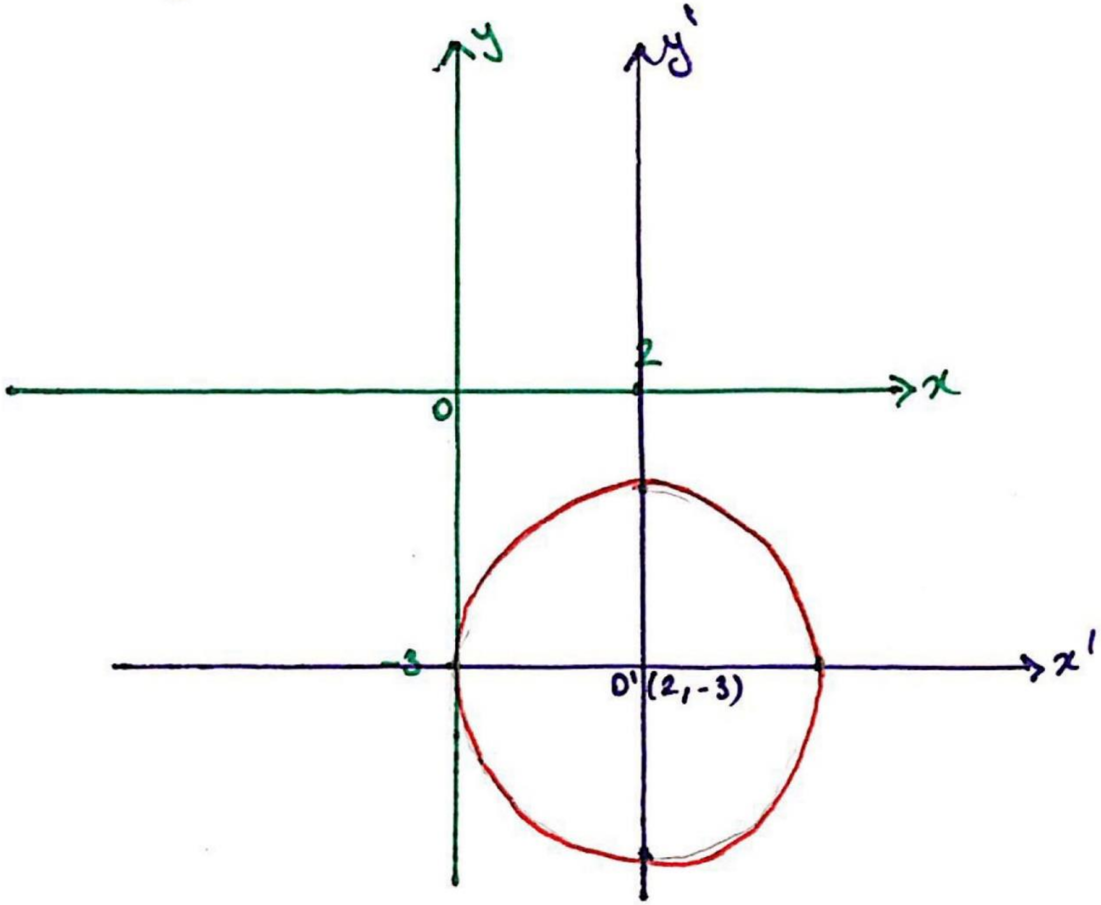
$\phi_y = 2y+6 \Rightarrow \phi_y(h,k) = 2k+6=0 \Rightarrow k=-3$

$F' = \phi(h,k) = h^2+k^2-4h+6k+9 = -4$

O halde koniğin $\begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-3 \end{cases}$ ötelemesi sonucu elde edilen

$x'o'y'$ deki denklemi, $x'^2+y'^2=4$ olup çemberdir.

$O'(2,-3)$ ve $x'^2+y'^2=4$ idi.



Not: Öteleme ve dönme işlemlerinin sırası önemli değildir.

Örnek: $x^2+y^2-4x+6y+17=0$ koniğini merkezil hale getiriniz.

Çözüm:

$$\phi_x = 2x-4 \Rightarrow \phi_x(h,k) = 2h-4 = 0 \Rightarrow h=2$$

$$\phi_y = 2y+6 \Rightarrow \phi_y(h,k) = 2k+6 = 0 \Rightarrow k=-3$$

$$F' = \phi(h,k) = 4+9-8-18+17 = 4$$

$$\Rightarrow x'^2+y'^2 = -4$$

Konik sanal çember olup grafiği çizilemez.

Örnek: $3x^2+4y^2-12x+4y+13=0$ koniğini merkezil hale getirerek grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=48\neq 0$. Öteleme uygulayalım:

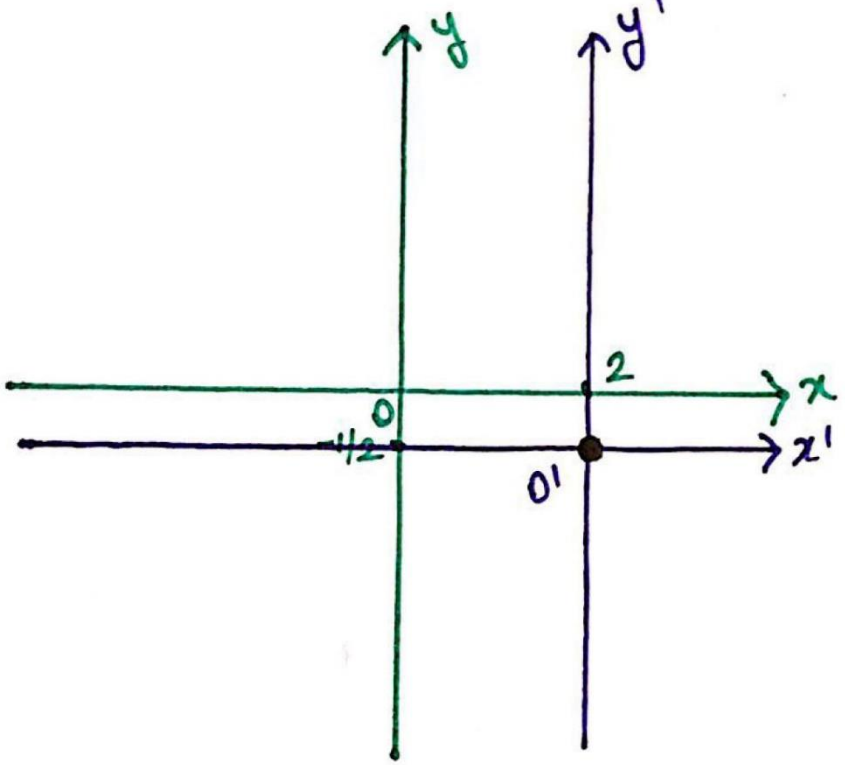
$\phi_x = 6x-12 \Rightarrow \phi_x(h,k) = 6h-12=0 \Rightarrow h=2$

$\phi_y = 8y+4 \Rightarrow \phi_y(h,k) = 8k+4=0 \Rightarrow k=-1/2$

$F' = \phi(h,k) = 0$

$\Rightarrow$ Koniğin $x'o'y'$ deki denklemi,

$3x'^2+4y'^2=0$ olup tek bir noktadan ibarettir. Bu nokta $O'(0,0)$ noktasıdır. Konik nokta elipstir.

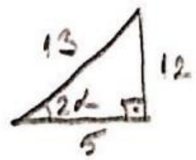

y
y'
2
x
0
-1/2
x'
0'

Örnek: $4x^2-12xy+9y^2+20x-30y+25=0$ koniğini merkezil hale getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$4AC-B^2=0$ dır. İlk olarak dönme uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{12}{5}$$



2α açısını 1. bölgede seçelim ($\tan 2\alpha > 0$) Bu durumda α da 1. bölgede olur.

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos 2\alpha = \frac{5}{13}$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ olur.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x'-2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y') \end{cases}$$

dönme denklemi bulunur.

Son denklemleri konik denkleminde yerine yazarsak, koniğin α açılı dönme ile elde edilen $x'oy'$ deki denklemi

$13y'^2 - 10\sqrt{13}y' + 25 = 0$ bulunur. $x'oy'$ sistemini

$\begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases}$ ötelemesiyle $x''o'y''$ sistemine dönüştürelim. Koniğin son sistemdeki denklemi,

$$13y''^2 + (\underbrace{26k - 10\sqrt{13}}_{0})y'' + 13k^2 - 10\sqrt{3}k + 25 = 0$$

olur.

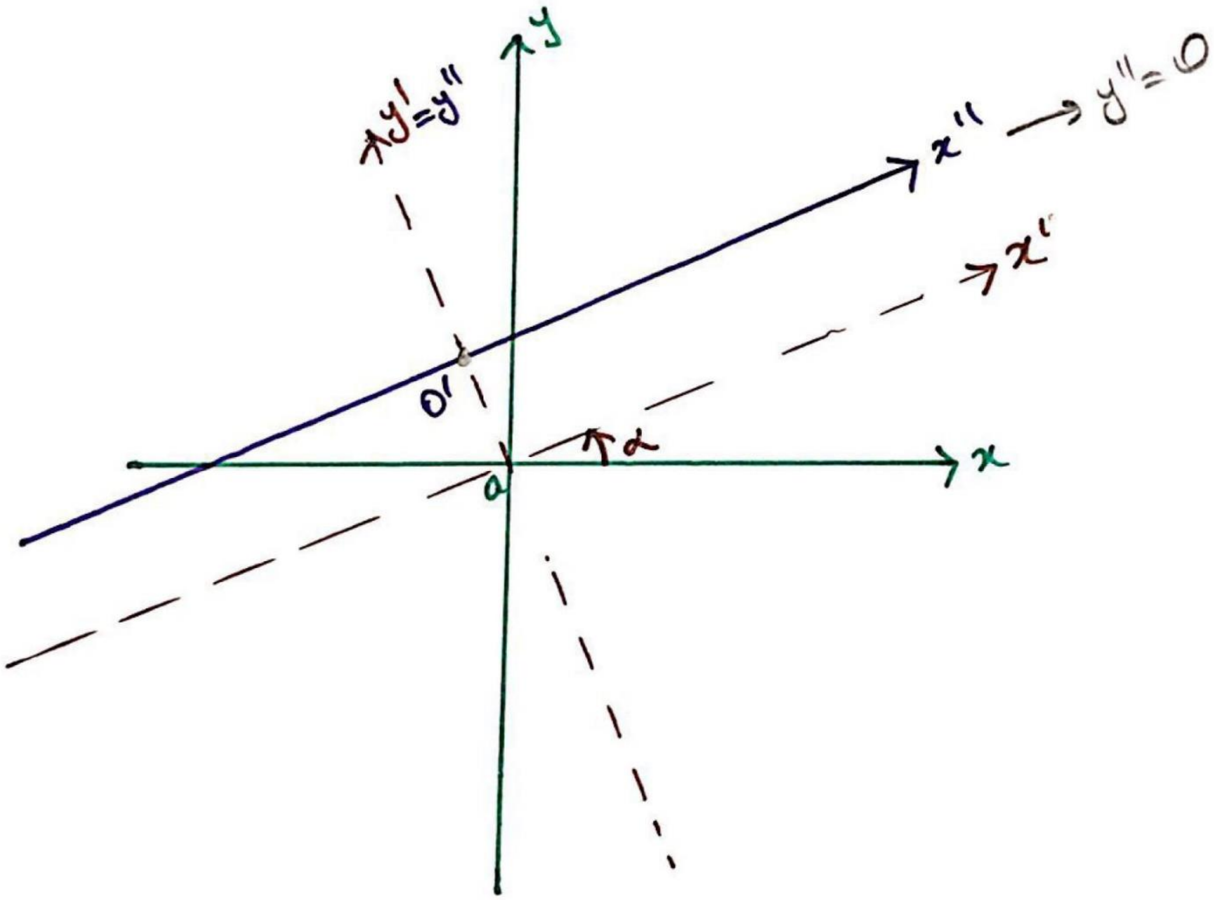
$26k - 10\sqrt{13} = 0 \Rightarrow k = \frac{5\sqrt{13}}{13}$, $3k^2 - 10\sqrt{3}k + 25 = 0$ olur.

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + \frac{5\sqrt{13}}{13} \end{cases}$ ötelemesi ile koniğin $x''o'y''$ deki denklemi,

$13y''^2 = 0 \Rightarrow y''^2 = 0$ (çakışık iki doğru)

olur.

Öteleme vektörünü $(h,k) = \left(0, \frac{5\sqrt{13}}{13}\right)$ alabiliriz.



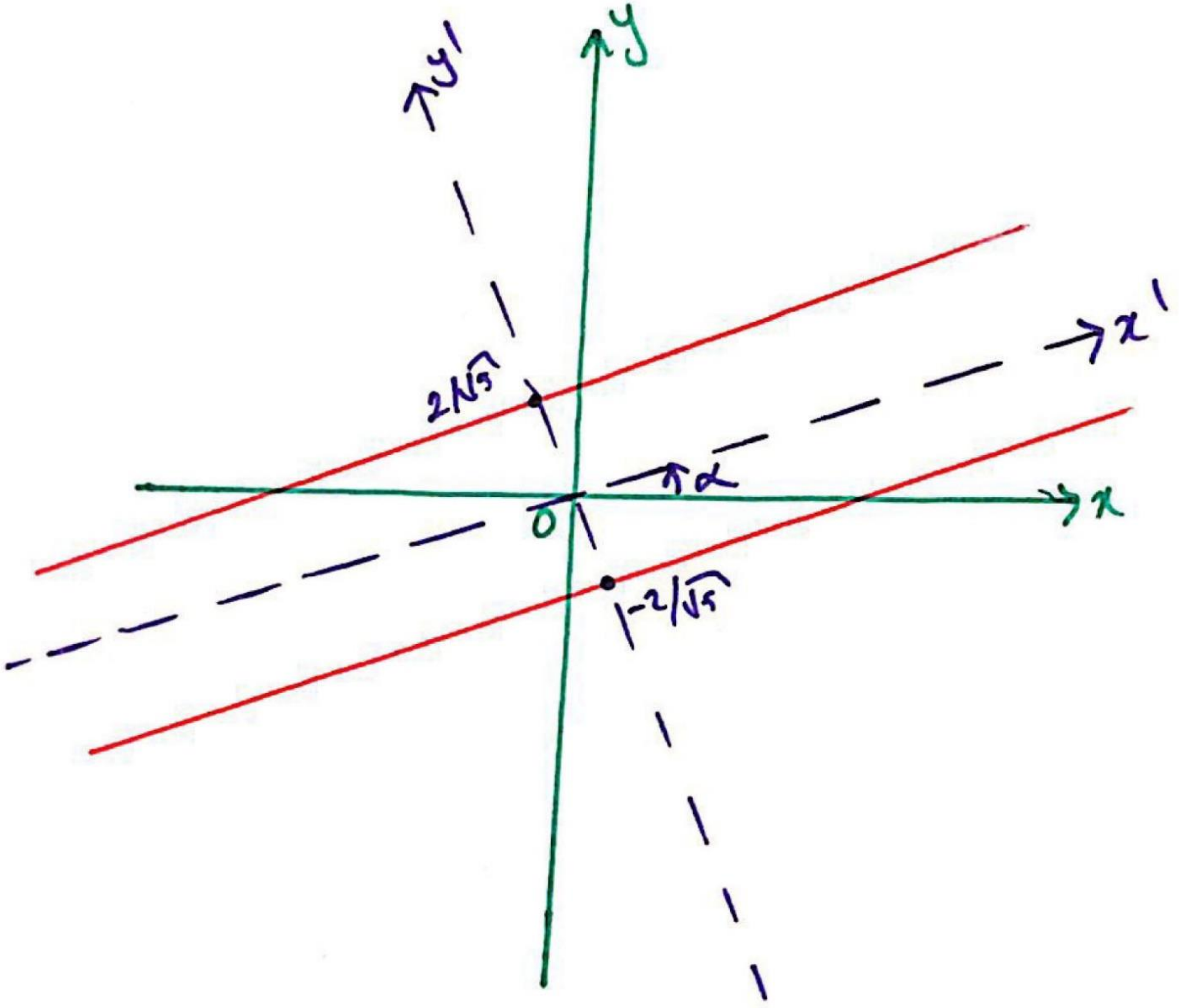
Örnek: $x^2-4xy+4y^2-4=0$ koniğini standart forma getirip grafiğini çiziniz.

Çözüm: $4AC-B^2=0$ dır. Önce dönme uygulayalım:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ olur.}$$

Dönme denklemi $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') \end{cases}$ elde edilir. Koniğin $x'oy'$ deki

denklemi $y'^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow y' = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$ olur. (paralel iki doğru)



y
y'
x'
x
α
O
2/√5
-2/√5

Problemler

Aşağıdaki konikleri merkezil hale getirip grafiklerini çiziniz.

1) $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

2) $25x^2+14xy+25y^2+22x-86y-191=0$

3) $8x^2-12xy+17y^2-4\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y-15=0$

4) $x^2-2xy+y^2+4x+8y+10=0$

5) $3x^2-10xy+3y^2+x-3y=0$

6) $x^2+3xy+4y^2-2x+6y+1=0$

7) $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$

8) $9x^2+4xy+6y^2+12x+36y+44=0$

9) $3x^2+3y^2-4x+2y+6=0$

10) $y^2-6y-4x+5=0$

11) $xy-2y-4x=0$

12) $9x^2+24xy+16y^2+80x-60y=0$

13) $16x^2+24xy+9y^2-30x+40y=0$

14) $x^2+4y^2-4xy-4=0$

15) $x^2-3xy+5y^2+3x+y-3=0$

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 4