UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

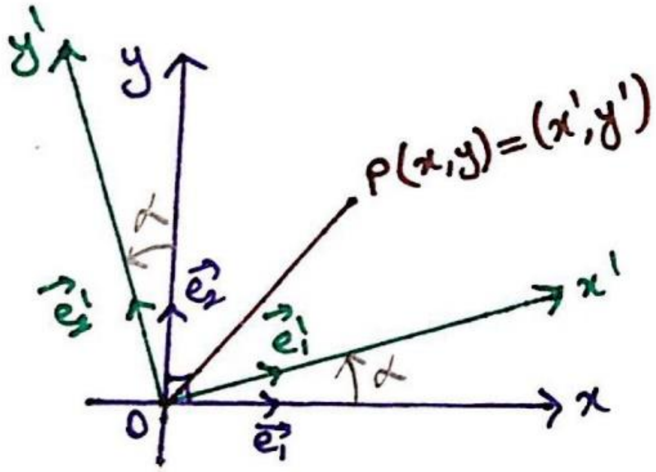
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 3

Koordinat Eksenlerinin Döndürülmesi



xoy dik koordinat sistemini α açısı kadar döndürelim. Koordinat sisteminin yeni konumu $x'oy'$ olsun.

Düzlemin bir P noktasının xoy deki koordinatları (x,y), $x'oy'$ deki koordinatları da (x',y') olsun.

$$\Rightarrow \vec{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}'$$

eşitliğin her iki yanını önce $\vec{e_1}$, sonra $\vec{e_2}$ ile iç çarpalım:

$\vec{e_1}$ ile :
$$x\underbrace{\langle \vec{e_1},\vec{e_1}\rangle}_{1} + y\underbrace{\langle \vec{e_2},\vec{e_1}\rangle}_{0} = x'\underbrace{\langle \vec{e_1}',\vec{e_1}\rangle}_{\cos\alpha} + y'\underbrace{\langle \vec{e_2}',\vec{e_1}\rangle}_{\cos(90+\alpha)}$$

e_2 ile :
$$x\underbrace{\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\rangle}_{0} + y\underbrace{\langle \vec{e_2},\vec{e_2}\rangle}_{1} = x'\underbrace{\langle \vec{e_1}',\vec{e_2}\rangle}_{\cos(90-\alpha)} + y'\underbrace{\langle \vec{e_2}',\vec{e_2}\rangle}_{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$ bulunur.

Dönmenin Genel Konik Denklemine Uygulanması

Problem: xoy koordinat sistemini uygun bir dönmeyle öyle bir $x'oy'$ koordinat sistemine dönüştürelim ki, koniğin $x'oy'$ sistemindeki denkleminde xy li terim yer almasın. Böylece konik denklemi daha sade hale gelsin.

$$\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ genel konik denklemi verilsin. xoy sistemini α açılı dönmeyle $x'oy'$ sistemine dönüştürelim. Bu dönmenin denklemi,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

dır. Koniğin yeni koordinat sistemindeki denklemini yazalım:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2$$

$+ D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$ bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$(A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)x'^2 + (-2A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha)x'y'$$
$$+ (A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y'^2 + (D\cos\alpha + E\sin\alpha)x' + (-D\sin\alpha + E\cos\alpha)y'$$
$$+ F = 0$$

bulunur. $x'y'$ lü terimi yok etmek için

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow (-A + C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}}$$ bulunur.

O halde xoy sistemi yukarıdaki bağıntıyı sağlayan bir α açısı kadar döndürülürse yeni oluşan $x'oy'$ sisteminde koniğin denklemini yazdığımızda $x'y'$ lü terim yer almaz.

Böylece koniğin $x'oy'$ deki denklemi,

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \text{ olur.}$$

Not: Dönmeden sonra sabitin değişmediğine dikkat ediniz.

Örnek: $xy - 1 = 0$ koniğine dönme işlemi uygulayınız. (Yani koniğin tanımlı olduğu xoy sistemini uygun bir dönme ile $x'oy'$ sistemine dönüştürünüz. Dönme açısını öyle seçiniz ki koniğin $x'oy'$ sisteminde denklemi yazıldığında $x'y'$ lü terim yer almasın)

Çözüm:

$A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ dır.

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{1}{0}$$

Bu eşitlikteki açı için $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ olur.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$ denklemlerinde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alınırsa

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$ bulunur.

Koniğin $x'oy'$ deki denklemi,

$xy - 1 = 0$ dan

$$\frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 0$$ olur.

Örnek: $x^2+2xy+y^2-x+y+1=0$ koniğine dönme islemi uygulayınız

Çözüm:

$$A=1,\ B=2,\ C=1 \text{ olup } \tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{2}{0}$$

bu kozulu sağlayan açı $2\alpha=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4} \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases} \text{ olur.}$$

Konik denkleminde yerine yazılırsa

$$2x'^2+\sqrt{2}y'+1=0$$

bulunur.

* Bu denklemin bir parabol belirttiğine dikkat ediniz.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 3