ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 2

Koniğin Analitik İfadesi

Düzlemde x veya y parametrelerine göre 2. dereceden bir fonksiyonun belirttiği eğriye konik adı verilir. Buna göre $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$ ve A,B,C den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

denklemi bir konik belirtir.

Örnekler

* $2x^2+3xy-5x+4=0$
* $xy+1=0$
* $x^2-5=0$
* $y^2=0$
* $x^2+5y=0$

denklemleri konik belirtir.

Koniğin Denkleminin Belirttiği Eğrinin İncelenmesi

$\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminin belirttiği eğrinin grafiği çizilirken iki yol izlenir:

1) Denklem $y = f(x)$ formuna getirilerek değişimi incelenir ve grafiği çizilir (Analitik derslerinden hatırlıyoruz)

2) Konik denklemi çeşitli koordinat dönüşümleri yardımı ile merkezil hale getirilerek grafiği çizilir.

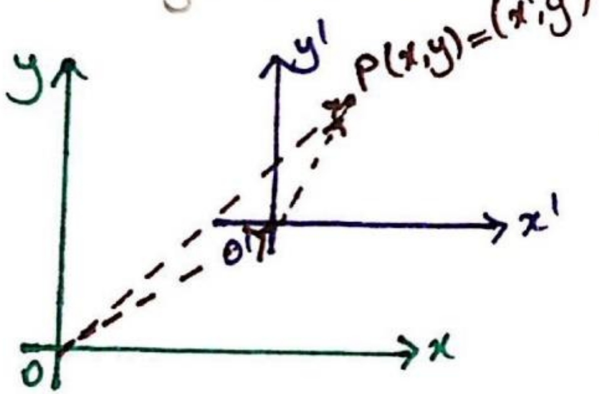
Koordinat dönüşümleri iki tanedir:

* Koordinat eksenlerinin ötelenmesi
* Koordinat eksenlerinin döndürülmesi

Not: Koniğin merkezil hale getirilmesi demek, konik denkleminde yer alan x, y ve xy li terimleri yok ederek konik denklemini daha sade bir duruma getirmek demektir.

Koordinat Eksenlerinin Ötelenmesi

Koordinat eksenlerinin yönü ve doğrultusunu değiştirmeden yer değiştirmesine koordinat eksenlerinin ötelenmesi denir. Bu dönüşüm yardımıyla konik denklemindeki x ve y li terimler yok edilmeye çalışılır.



xoy dik koordinat sisteminin O orijin noktasını $O'(h,k)$ noktasına taşıyalım. Yeni koordinat sistemimiz $x'O'y'$ olsun. Düzlemin bir P noktasının xoy deki koordinatları (x,y) ve $x'O'y'$ deki koordinatları da (x',y') olsun. Şekilden,

$$\vec{OO'}+\vec{O'P}=\vec{OP} \Rightarrow (x,y)=(x',y')+(h,k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}}$$ bulunur.

Not: $\vec{OO'} = \vec{u} = (h,k)$ vektörüne **öteleme vektörü** adı verilir.

Örnek:

xoy dik koordinat sisteminde $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ koniği veriliyor. Öteleme vektörü $\vec{u}=(2,-3)$ olmak üzere koniğin $x'o'y'$ koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

Çözüm:

Koordinat sistemleri arasındaki ilişki,

$$\begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-3 \end{cases}$$ olur. Bu ifadeler denklemde yazılırsa,

$$(x'+2)^2+(y'-3)^2-4(x'+2)-6(y'-3)+9=0$$

$$\Rightarrow x'^2+y'^2-12y'+32=0$$

olur. Bu son ifade aynı koniğin $x'o'y'$ koordinat sistemindeki denklemidir.

Problem: xoy koordinat sistemini uygun bir ötelemeyle öyle bir $x'o'y'$ koordinat sistemine dönüştürelim ki, koniğin $x'o'y'$ sistemindeki denkleminde 1. dereceden terimler (x ve y li) yer almasın. Böylece konik denklemi daha sade duruma gelsin.

Ötelemenin Genel Konik Denklemine Uygulanması

$\Phi(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ genel konik denklemi verilsin.

xoy koordinat sistemini $\begin{cases} x = x'+h \\ y = y'+k \end{cases}$ ötelemesiyle $x'o'y'$ koordinat sistemine dönüştürelim. Koniğin yeni koordinat sistemindeki denklemini yazalım:

$$A(x'+h)^2+B(x'+h)(y'+k)+C(y'+k)^2+D(x'+h)+E(y'+k)+F=0$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Ah+Bk+D)x'+(2Ck+Bh+E)y'$$
$$+(\underbrace{Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F}_{F'})=0$$

bulunur.

x' ve y' lü terimleri yok etmek için

$$\begin{cases} 2Ah+Bk+D=0 \\ 2Ck+Bh+E=0 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

olmalıdır. Yani h ve k yı (*) denklemini sağlayacak şekilde seçersek koniğin yeni koordinat sistemindeki denkleminde 1. dereceden terimler yok olur. Böylece koniğin $x'O'y'$ deki denklemi

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+F'=0 \quad \text{olur.}$$

Not: Konik denklemine öteleme işlemi uygulandığında ilk üç terimin katsayısının değişmediğine ve $F'=\phi(h,k)$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $x^2-xy+y^2-2x+6y-1=0$ koniğine öteleme işlemi uygulayarak 1. dereceden terimleri yok ediniz. (Yani koniğin tanımlı olduğu xoy koordinat sistemini uygun bir öteleme ile $x'o'y'$ sistemine öteleyiniz. Ötelemeyi öyle seçiniz ki, koniğin $x'o'y'$ sistemindeki denklemi yazıldığında 1. dereceden terimler yer almasın.)

Çözüm:

$x=x'+h$, $y=y'+k$ ötelemesi ile xoy sistemini $x'o'y'$ ye öteleyelim. Koniğin yeni sistemdeki denklemi,

$$(x'+h)^2-(x'+h)(y'+k)+(y'+k)^2-2(x'+h)+6(y'+k)-1=0$$

$$\Rightarrow x'^2-x'y'+y'^2+(\underbrace{2h-k-2}_{0})x'+(\underbrace{-h+2k+6}_{0})y'+(h^2-hk+k^2-2h+6k-1)=0$$

olur.

$$\begin{cases} 2h-k-2=0 \\ -h+2k+6=0 \end{cases} \Rightarrow h=-\frac{2}{3}, \quad k=-\frac{10}{3} \text{ bulunur.}$$

O halde, xoy koordinat sistemini

$$\begin{cases} x = x' - \frac{2}{3} \\ y = y' - \frac{10}{3} \end{cases}$$

ötelemesiyle $x'o'y'$ sistemine ötelersek koniğin yeni sistemdeki denkleminde 1. dereceden terimler yer almaz. Yani konik denklemi daha sade hale gelmiş olur.

$$F' = \Phi(h,k) = h^2 + k^2 - hk - 2h + 6k - 1$$

olup bu değer hesaplanırsa

$$F' = -\frac{93}{9}$$

bulunur. Böylece koniğin $x'o'y'$ deki denklemi,

$$x'^2 - x'y' + y'^2 - \frac{93}{9} = 0$$

olur. ($x^2 - xy + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$ ilk sistemdeki denklemi idi.)

Not: $\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

denkleminin x ve y ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2Ax + By + D$$

$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = Bx + 2Cy + E$$

$O'(h,k)$ olmak üzere $\quad \phi_x \big|_{O'} = 2Ah + Bk + D$

$$\phi_y \big|_{O'} = Bh + 2Ck + E$$

için $\quad \phi_x \big|_{O'} = 0$ ve $\phi_y \big|_{O'} = 0$ denklemlerinin h ve k yı bulmak için kullanılan $(*)$ denklemleri ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

Not: $4AC - B^2 = 0$ ise h ve k yı bulmak için bu yöntem kullanılamaz

Örnek:

$x^2+y^2-2x+2y-2=0$ koniğine öteleme işlemi uygulayarak 1. dereceden terimleri yok ediniz.

Çözüm:

$$\phi_x = 2x-2 \,, \quad \phi_y = 2y+2$$

$O'(h,k)$ için $\phi_x\big|_{O'} = 2h-2=0 \Rightarrow h=1$

$$\phi_y\big|_{O'} = 2k+2=0 \Rightarrow k=-1$$

O halde uygun öteleme $\begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$ olur.

$$F' = \phi(h,k) = \phi(1,-1) = 1^2+(-1)^2-2.1+2(-1)-2 = -4 \text{ olup}$$

koniğin $x'o'y'$ deki denklemi $x'^2+y'^2-4=0$ dır.

Örnek: $x^2-2xy+y^2-2x+3y-1=0$ koniği için yukarıdaki yöntemin kullanılamayacağını gösteriniz.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 2