ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

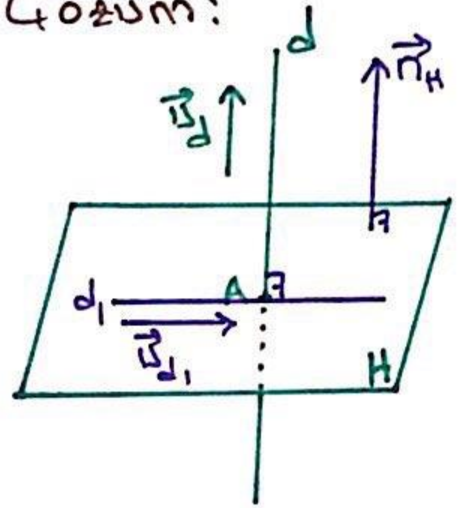
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17

Örnek: $d \ldots (\overbrace{x+2y+4z-2=0}^{P}, \overbrace{2x+3y-2z+3=0}^{Q})$ doğrusunun $H \ldots 2x-y+4z+8=0$ düzlemini deldiği A noktasından geçen, H düzleminde bulunan ve d doğrusuna dik olan d_1 doğrusunu bulunuz.

Çözüm:



Önce $d \cap H = \{A\}$ olan A noktasını bulalım:

Bunun için

$$\begin{cases} x+2y+4z-2=0 \\ 2x+3y-2z+3=0 \\ 2x-y+4z+8=0 \end{cases}$$

sisteminin çözümünü bulmalıyız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -46$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-46} = -4 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -8 & 4 \end{vmatrix}}{-46} = 2 \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix}}{-46} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow A(-4, 2, \frac{1}{2})$ olur.

$\vec{u}_{d_1} = (a, b, c)$ olsun. $\vec{n}_H = (2, -1, 4)$ olmak üzere,

$\vec{u}_{d_1} \perp \vec{n}_H \Rightarrow \langle \vec{u}_{d_1}, \vec{n}_H \rangle = 0 \Rightarrow 2a - b + 4c = 0 \ldots$ ①

$$\vec{u}_d = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 10, -1)$$

$\vec{u}_{d_1} \perp \vec{u}_d \Rightarrow \langle \vec{u}_{d_1}, \vec{u}_d \rangle = 0 \Rightarrow -16a + 10b - c = 0 \ldots$ ②

① ve ② de $a = 1$ alınırsa, $b = \frac{46}{39}$ ve $c = -\frac{164}{39}$ bulunur.

$\Rightarrow \vec{u}_{d_1} = (39, 46, -164)$ alınabilir.

$A(-4, 2, 1/2)$ olduğundan

$d_1 \ldots \dfrac{x+4}{39} = \dfrac{y-2}{46} = \dfrac{z-1/2}{-164} = \lambda$ bulunur.

2601

Örnek: $x+y+z-1=0$ ve $mx-2ny+z-l=0$ düzlemlerinin

a) Paralel

b) Çakışık

Olmaları için m, n ve l arasındaki bağıntı ne olmalıdır.

Örnek: A(1,2,-4) noktasından geçen ve xoy düzlemine paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

xoy düzleminin denklemi $z=0$ normali de $\vec{e_3}=(0,0,1)$ dir. Aradığımız düzlem xoy düzlemine paralel olacağından bu düzlemin normali de $\vec{e_3}$ olur.

$$\Rightarrow P \ldots \; 0x+0y+z+d=0$$

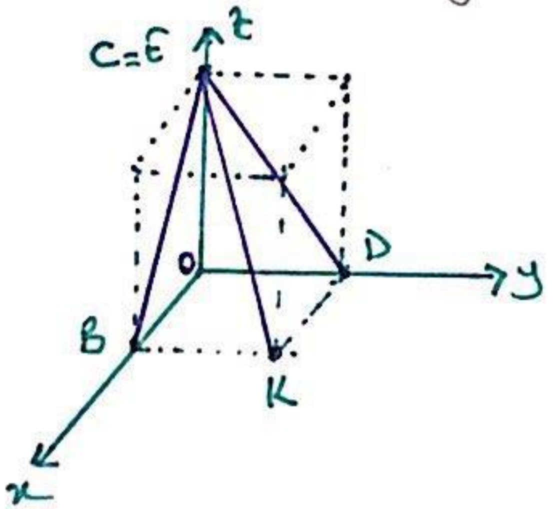
$$A \in P \Rightarrow -4+d=0 \Rightarrow d=4$$

$$\Rightarrow P \ldots \; z+4=0 \text{ olur.}$$

Örnek: $P_1 \ldots 2x+z-4=0$, $P_2 \ldots 4y+3z-12=0$ düzlemlerinin koordinat düzlemleriyle sınırladığı hacmi bulunuz.

Çözüm:

P_1 in normali $\vec{n}_1=(2,0,1)$ olup $\vec{n}_1 \perp \vec{e}_2$ dir. O halde y ekseni ya P_1 e paraleldir ya da P_1 in içindedir. y eksenine ait bir nokta $A(0,1,0)$ için $A \notin P_1$ olup P_1 düzlemi y eksenine paraleldir. P_1 in x ve z eksenlerini kestiği noktalar $B(2,0,0)$ ve $C(0,0,4)$ olur. Benzer şekilde P_2 düzlemi de x eksenine paralel olup y ve z eksenlerini kestiği noktalar $D(0,3,0)$ ve $E(0,0,4)$ olur.



İstenilen hacim, OBKDE piramidinin hacmidir. Bu hacim ise $\vec{OB}$, $\vec{OD}$ ve $\vec{OC}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacminin $\frac{1}{3}$ üne eşittir.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \langle \vec{OB} \times \vec{OD}, \vec{OC} \rangle$$

$$= \frac{1}{3} \det(\vec{OB}, \vec{OD}, \vec{OC}) = 8 \text{ br}^3 \text{ olur.}$$

263 4

Örnek: $P \ldots x+2y+3z-6=0$ düzlemine ait olan ve koordinat eksenlerinin P düzlemini deldiği noktalardan eşit uzaklıkta olan noktayı bulunuz.

Çözüm:

Aradığımız nokta $K(x_0, y_0, z_0)$ olsun.

$K \in P$ olduğundan $x_0+2y_0+3z_0-6=0 \ldots (1)$

x ekseninin P yi kestiği nokta $y=z=0$ için $A(6,0,0)$,

y ekseninin P yi kestiği nokta $B(0,3,0)$ ve

z ekseninin P yi kestiği nokta $C(0,0,2)$ dir.

Hipotezden $\|\vec{AK}\| = \|\vec{BK}\| = \|\vec{CK}\|$ olur.

$\|\vec{AK}\| = \|\vec{BK}\| \Rightarrow 4x_0 - 2y_0 - 9 = 0 \ldots (2)$

$\|\vec{AK}\| = \|\vec{CK}\| \Rightarrow 3x_0 - z_0 - 8 = 0 \ldots (3)$

(1), (2) ve (3) ortak çözülürse $K\left(\frac{39}{14}, \frac{15}{14}, \frac{5}{14}\right)$ bulunur.

Örnek: $P \ldots 4x-8y+17z-8=0$ düzlemi

$$\lambda_1(5x-y+4z-1)+\lambda_2(2x+2y-3z+2)=0$$

düzlem demetine ait midir?

Çözüm:

$d \ldots (5x-y+4z-1=0,\ 2x+2y-3z+2=0)$ doğrusunu bulalım:

$$z=t \qquad \begin{cases} 5x-y=1-4t \\ 2x+2y=-2+3t \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{12}t,\quad y=-1+\frac{23}{12}t$$

$$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x=-\frac{5}{12}t \\ y=-1+\frac{23}{12}t \\ z=t \end{cases} \quad \text{olur.}$$

$d \overset{?}{\in} P \Rightarrow -\frac{5}{3}t+8-\frac{26}{4}t+17t-8=0$ olup $d \in P$ dir.

O halde P düzlemi, verilen düzlem demetine aittir.

Örnek: $P_1 \ldots x+y+z+1=0$, $P_2 \ldots 2x-y+z=0$ düzlemlerinin arakesitinden ve $A(1,0,0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$d \ldots (P_1=0, P_2=0)$ olmak üzere

$$d \ldots \frac{x+1/3}{-2/3} = \frac{y+2/3}{-1/3} = \frac{z}{1} = t$$

bulunur. $t=0$ için $B(-1/3, -2/3, 0) \in d$

$t=1$ için $C(1/3, -1/3, -1) \in d$ olur.

A, B ve C den geçen düzlem denklemi yazılırsa

$P \ldots x-2y-1=0$ bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17