ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

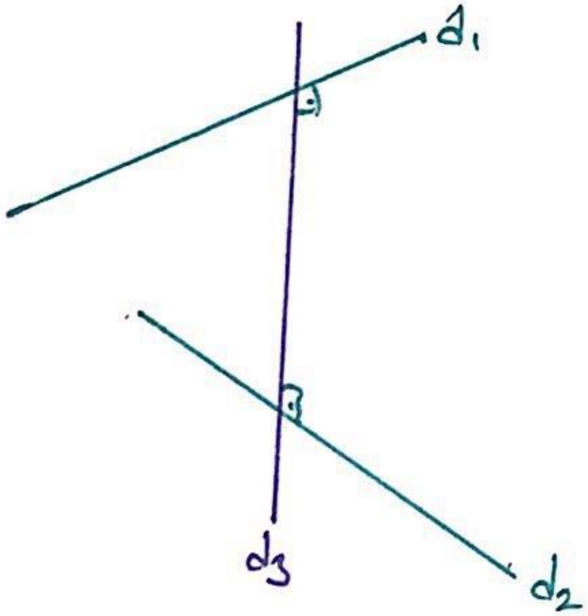
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

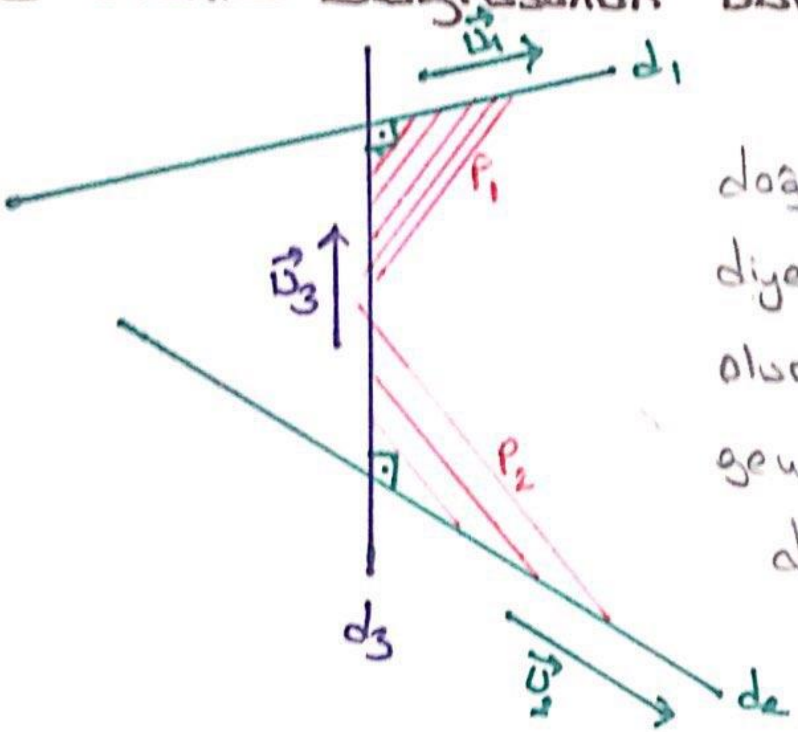
Ders 16

AYKIRI İKİ DOĞRUNUN ORTAK DİKMESİ VE AYKIRI İKİ DOĞRU ARASINDAKİ UZAKLIK



d_1 ve d_2 aykırı doğrularının her ikisini de dik olarak kesen d_3 doğrusuna d_1 ve d_2 nin ortak dikme doğrusu denir. d_3 ün d_1 ve d_2 yi kestiği noktalar arasındaki uzaklığa da d_1 ve d_2 aykırı doğruları arasındaki uzaklık adı verilir.

Ortak Dikme Doğrusunun Bulunması



$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ olur. d_1 ve d_3 doğrularının belirttiği düzleme P_1 diyelim. P_1 in normali $\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3$ olur. $A \in d_1$ için $A \in P_1$ olup A noktasından geçen ve normali $\vec{n}_1$ olan düzlem denklemi P_1 in denklemidir.

d_2 ve d_3 doğrularının belirttiği düzleme P_2 diyelim. P_2 nin normali $\vec{n}_2 = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$ olur. $B \in d_2$ için $B \in P_2$ olup B noktasından geçen ve normali $\vec{n}_2$ olan düzlem denklemi P_2 nin denklemidir.

$\Rightarrow d_3 \ldots (P_1 = 0 \,,\, P_2 = 0)$ olur.

$d_1 \cap d_3 = \{C\}$ ve $d_2 \cap d_3 = \{D\}$ olmak üzere d_1 ile d_2 arasındaki uzaklık $\lambda = \|\overrightarrow{CD}\|$ olur.

Örnek: $d_1 \ldots \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1} = \lambda$

ve

$d_2 \ldots \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-4}{-2} = t$ doğrularının aykırı olduğunu

gösteriniz. Ortak dikme doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (2,2,-1)$, $\vec{u}_2 = (2,3,-2)$ dir. Ortak dikme doğrusu

d_3 ve doğrultmanı da $\vec{u}_3$ olsun. O halde $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-1,2,2)$ dir.

d_1 ile d_3 ün belirttiği düzlem P_1 ve normali de $\vec{n}_1$ olmak üzere

$\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 = (6,-3,6)$ dır. Ayrıca $\lambda = 0$ için $A(1,-2,3) \in P_1$ olur.

$\Rightarrow P_1 \ldots 6x - 3y + 6z + d = 0$

$A \in P_1 \Rightarrow 6 + 6 + 18 + d = 0 \Rightarrow d = -30$

$\Rightarrow \boxed{P_1 \ldots 2x - y + 2z - 15 = 0}$

d_2 ile d_3 ün belirttiği düzlem P_2 ve normali de $\vec{n_2}$ olmak üzere $\vec{n_2} = \vec{u_2} \wedge \vec{u_3} = (10,-2,7)$ dir. Ayrıca, $t=0$ için $B(-2,3,4) \in P_2$ olur.

$$\Rightarrow P_2 \ldots \; 10x - 2y + 7z + d = 0$$

$$B \in P_2 \Rightarrow -20 - 6 + 28 + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 \ldots \; 10x - 2y + 7z - 2 = 0}$$

$$\Rightarrow d_3 \ldots \; (P_1 = 0 \; , \; P_2 = 0)$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 15 = 0 \\ 10x - 2y + 7z - 2 = 0 \end{cases}$$

$z=0$ için $x=-3$, $y=-16$ bulunur. O halde $C(-3,-16,0) \in d_3$

$\vec{u_3} = (-1,2,2)$ olduğundan

$$d_3 \ldots \; \frac{x+3}{-1} = \frac{y+16}{2} = \frac{z-0}{2} \text{ bulunur}$$

Bir Düzlemin Koordinat Eksenleriyle Yaptığı Açılar Cinsinden Denklemi

$P \ldots ax+by+cz+d=0$ düzlemi verilsin. Düzlemin normali, $\vec{n}=(a,b,c)$ dir. P nin x, y ve z eksenleriyle yaptığı açılar sırasıyla α, β ve γ olsun. O halde,

$\vec{n}$ ile $\vec{e_1}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\vec{n}$ ile $\vec{e_2}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\beta$

$\vec{n}$ ile $\vec{e_3}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2}-\gamma$ olur.

$$\Rightarrow \langle \vec{n}, \vec{e_1} \rangle = \|\vec{n}\| . \|\vec{e_1}\| . \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \Rightarrow a = \sqrt{a^2+b^2+c^2} . \sin\alpha$$

$$\langle \vec{n}, \vec{e_2} \rangle = \|\vec{n}\| . \|\vec{e_2}\| . \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \Rightarrow b = \sqrt{a^2+b^2+c^2} . \sin\beta$$

$$\langle \vec{n}, \vec{e_3} \rangle = \|\vec{n}\| . \|\vec{e_3}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2+c^2} . \sin\gamma$$

O halde $\boxed{\vec{n}=(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)}$ alınabilir.

2501

Ayrıca $\boxed{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1}$ olup

$$\boxed{P \ldots (\sin\alpha)x + (\sin\beta)y + (\sin\gamma)z + d' = 0}$$

elde edilir.

Düzlemin Eksenlerden Ayırdığı Parçalar Cinsinden Denklemi

$P \ldots \quad ax+by+cz+d=0$ düzlemi verilsin. P nin x, y ve z eksenlerini kestiği noktalar sırası ile A, B ve C olsun.

$$\Rightarrow A\Big(\underbrace{-\frac{d}{a}}_{a_1},0,0\Big), B\Big(0,\underbrace{-\frac{d}{b}}_{b_1},0\Big), C\Big(0,0,\underbrace{-\frac{d}{c}}_{c_1}\Big) \text{ olur.}$$

$$P \ldots \quad \frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\frac{c}{d}z+1=0$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad \frac{x}{-d/a}+\frac{y}{-d/b}+\frac{z}{-d/c}=1$$

$$\Rightarrow P \ldots \boxed{\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek:

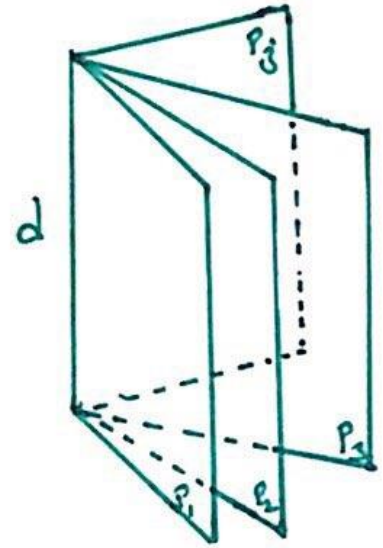
Koordinat eksenlerini A(3,0,0), B(0,-4,0), C(0,0,1) noktalarında kesen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{1}=1$$

$$\Rightarrow 4x-3y+12z-12=0 \text{ olur.}$$

Bir Doğrudan Geçen Düzlemler (Düzlem Demeti)



Bir d doğrusundan sonsuz sayıda düzlem geçer. Bu düzlemlerin kümesine düzlem demeti, doğruya da düzlem demetinin ekseni denir.

d doğrusundan geçen iki düzlem,

$P_1 \ldots a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ve $P_2 \ldots a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

olmak üzere d doğrusundan geçen tüm düzlemlerin (düzlem demetinin) denklemi,

$$\boxed{\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1 \neq 0$ için $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\lambda$ alınırsa

$$\boxed{a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0}$$

bulunur. Bu son denklem de d den geçen tüm düzlemleri (P_2 hariç) verir.

Örnek:

$$P_1 \ldots \ 2x-3y+5z+10=0$$

$$P_2 \ldots \ 4x-y-z-5=0$$

düzlemlerinin arakesit doğrusundan ve $O(0,0,0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

P_1 ve P_2 nin arakesit doğrusundan geçen tüm düzlemlerin denklemi

$$2x-3y+5z+10+\lambda(4x-y-z-5)=0$$

şeklindedir. Bu düzlemlerin içerisinden $O(0,0,0)$ noktasından geçeni arıyoruz.

$$\Rightarrow \ 10-5\lambda=0 \ \Rightarrow \ \lambda=2$$

$$\Rightarrow \ 10x-5y+3z=0$$ bulunur.

Örnek:

$$d \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4} = \lambda$$ doğrusu ve $A(2,0,5)$

noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

Çözüm:

d doğrusunu iki düzlemin arakesit doğrusu olarak yazalım: $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1}$ ve $\frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$

$$\Rightarrow P_1 \ldots x-3y-2=0 \text{ ve } P_2 \ldots 4y-z-1=0$$

olmak üzere $d \ldots (P_1=0,\ P_2=0)$ dır. d den geçen tüm düzlemler $x-3y-2+\lambda(4y-z-1)=0$ dır. A noktası için $\lambda=0$ bulunur. O halde aranan düzlem,

$$x-3y-2=0$$ dır.

Örnek :

$d \ldots (2x+y-5=0,\ x+z-6=0)$ doğrusundan geçen ve $P \ldots\ x-y+z+1=0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

d den geçen tüm düzlemler,

$$2x+y-5+\lambda(x+z-6)=0$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)x+y+\lambda z-5-6\lambda=0$$

şeklindedir. $\vec{n}_P=(1,-1,1)$, $\vec{n}_\lambda=(2+\lambda,1,\lambda)$ olup

$\vec{n}_P \perp \vec{n}_\lambda$ olacaktır.

$$\Rightarrow 2+\lambda-1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x+y-\frac{1}{2}z-2=0$$

$$\Rightarrow 3x+2y-z-4=0 \text{ olur.}$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 16