UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

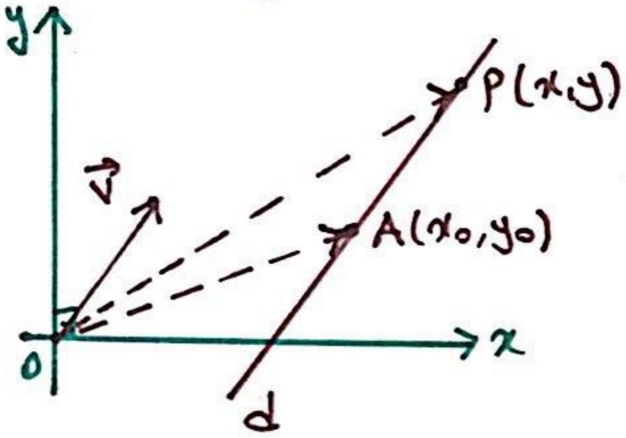
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7

DÜZLEMDE DOĞRULAR

Verilen Bir Noktadan Geçen ve Verilen Bir Vektöre Paralel Olan Doğru Denklemi



$A(x_0, y_0)$ dan geçen ve $\vec{v} = (a,b)$ vektörüne paralel olan d doğrusunun denklemini bulalım: Doğru üzerinde keyfi bir $P(x,y)$ noktası alalım.

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ dir.

P nin d üzerinde bulunma şartı,

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}}$$ → doğrunun vektörel denklemi

$\Rightarrow (x,y) = (x_0, y_0) + \lambda (a,b)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}}$$ → doğrunun parametrik denklemi

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}}$$ → doğrunun kartezyen denklemi

$$\Rightarrow bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

$b = A$, $-a = B$, $-bx_0 + ay_0 = C$ alınırsa

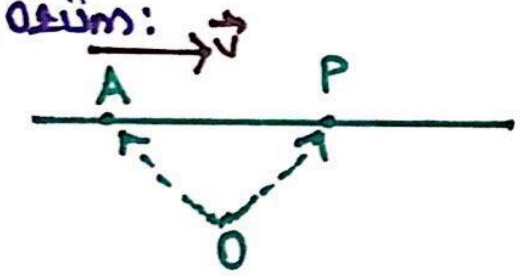
$\boxed{Ax + By + C = 0}$ Genel doğru denklemi

Not: Genel doğru denkleminde $(A,B) = (b,-a) = \vec{n}$ olup $\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = 0$ olduğundan $\vec{n} \perp \vec{v}$ dir.

Not: Doğruya paralel olan $\vec{v}$ vektörüne doğrunun doğrultman vektörü, doğruya dik olan $\vec{n}$ vektörüne de doğrunun normal vektörü denir.

Örnek: A(1,3) den geçen ve $\vec{v}=(2,-2)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik, kartezyen ve genel denklemini bulunuz.

Çözüm:



Doğru üzerinde keyfi bir nokta P(x,y) olsun.

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

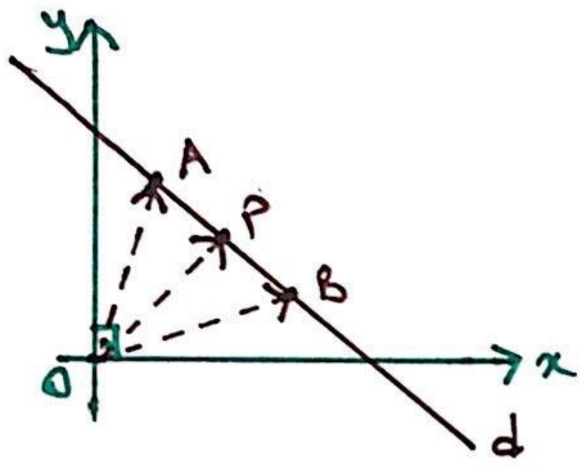
$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow \text{vektörel d.}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = t \quad \text{kartezyen d.}$$

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-2t \end{cases} \quad \text{parametrik d.}$$

$$2x+2y-5=0 \quad \text{genel d.}$$

İki Noktası Verilen Doğru Denklemi



$A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulalım: Doğru üzerinde keyfi bir nokta $P(x,y)$ olsun.

$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

P nin d üzerinde bulunması şartı,

$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB}}$ doğrunun vektörel denklemi

$$\Rightarrow (x,y) = (x_1,y_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}}$ doğrunun parametrik denklemi

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$ doğrunun kartezyen denklemi

Örnek: $A(1,2)$ ve $B(3,4)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel, parametrik, kartezyen ve genel denklemini bulunuz.

Örnek: $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denkleminin

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Determinant açılırsa $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \ldots (1)$ bulunur. A ve B den geçen doğrunun denkleminin,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \ldots (2)$$

olduğunu biliyoruz.

(1) ve (2) den istenilen elde edilir.

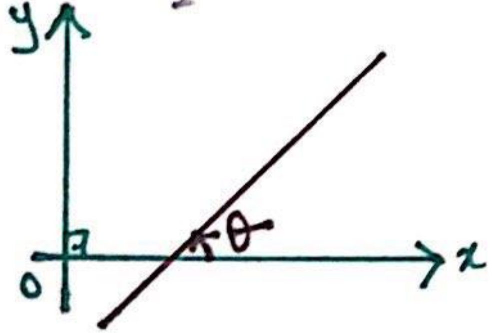
Örnek: x eksenini $A(p,0)$, y eksenini $B(0,q)$ noktalarında kesen doğrunun denkleminin

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

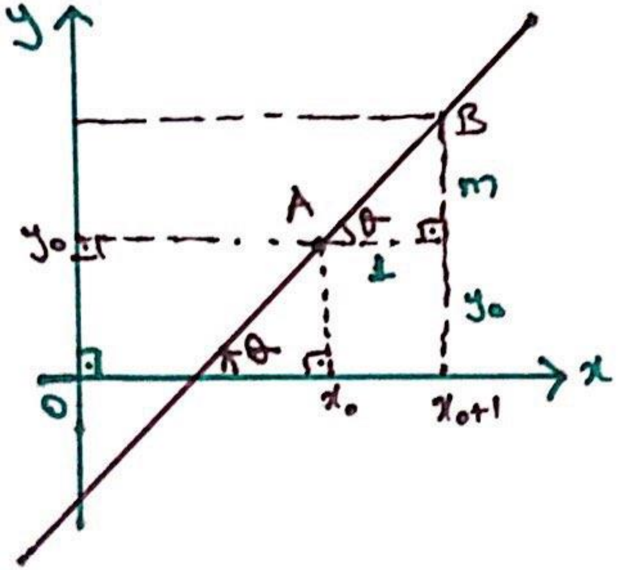
olduğunu gösteriniz.

Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

Eğim: Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun eğim açısı denir. Eğim açısının ölçüsü θ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $m = \tan\theta$ sayısına doğrunun eğimi denir.



$A(x_0, y_0)$ dan geçen ve eğimi m olan d doğrusunun denklemini bulalım:



x_0 a 1 birimlik artma verelim. $\tan\theta = m$ olduğundan $B(x_0+1, y_0+m) \in d$ noktasını elde ederiz. İki noktası bilinen doğru denkleminden

$$\frac{y-y_0}{m} = \frac{x-x_0}{1}$$

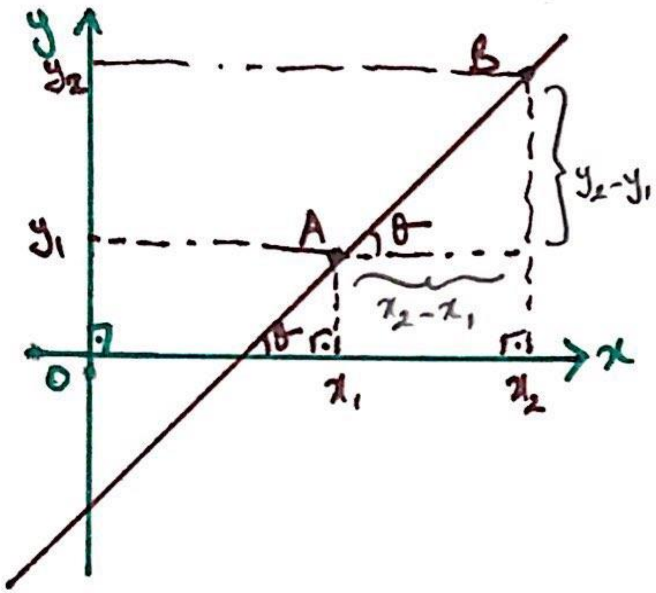
$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ olur.

Not: Denklemde y tek başına bırakıldığında x in katsayısının eğimi verdiğine dikkat ediniz.

$B \neq 0$ olmak üzere $Ax+By+C=0$ genel doğru denklemi için $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ olacağından $m=-\frac{A}{B}$ olur.

Örnek: $A(2,3)$ den geçen ve x ekseniyle 45° açı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

İki Noktası Verilen Doğrunun Eğimi



$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ dir.

Örnek: $A(7,3)$ noktasından geçen ve $\vec{n}=(5,2)$ vektörüne dik olan doğruyu bulunuz.

Çözüm:

Doğrunun doğrultmanı $\vec{v}=(a,b)$ olsun.

$\vec{v}\perp\vec{n}$ olacağından $\langle\vec{v},\vec{n}\rangle=0 \Rightarrow 5a+2b=0$ olur.

$b=5$ alınırsa $a=-2$ bulunur.

$\Rightarrow \vec{v}=(-2,5)$

$\Rightarrow d\ldots \dfrac{x-7}{-2}=\dfrac{y-3}{5}=t$

Örnek: $A(1,2)$ den geçen ve x eksenine paralel olan doğruyu bulunuz.

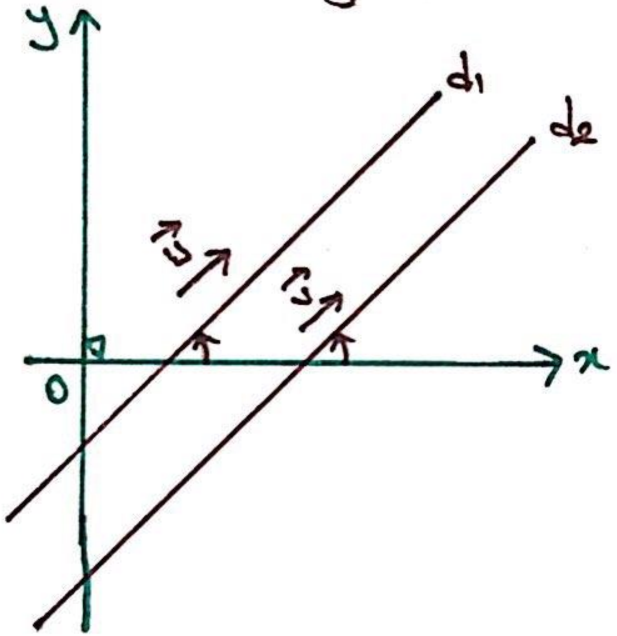
Çözüm:

$\vec{v}=(1,0)$ alınabilir. $\quad d\ldots \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=t$

$\Rightarrow d\ldots\ y-2=0$

Not: Doğrultman vektörünün her katı da doğrultman vektörüdür.

Paralel Doğrular



$d_1 \parallel d_2 \iff \vec{u} \parallel \vec{u}$

veya

$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$

Örnek: $d_1 \ldots \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ $\quad d_2 \ldots \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$

doğruların paralel olması için k ne olmalıdır?

Çözüm:

$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (k, -4) = a(3, 2)$

$\Rightarrow k = 3a, -4 = 2a \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{-4}{2} \Rightarrow k = -6$

Örnek: A(−1,2) ve B(1,a) dan geçen doğru $-3x+2y+6=0$ doğrusuna paralel ise $a=?$

Çözüm:

$m_1 = m_2$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \frac{a-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 5$$

Not: $d_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $d_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0$ doğrularının paralel olma koşulunu bulalım:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

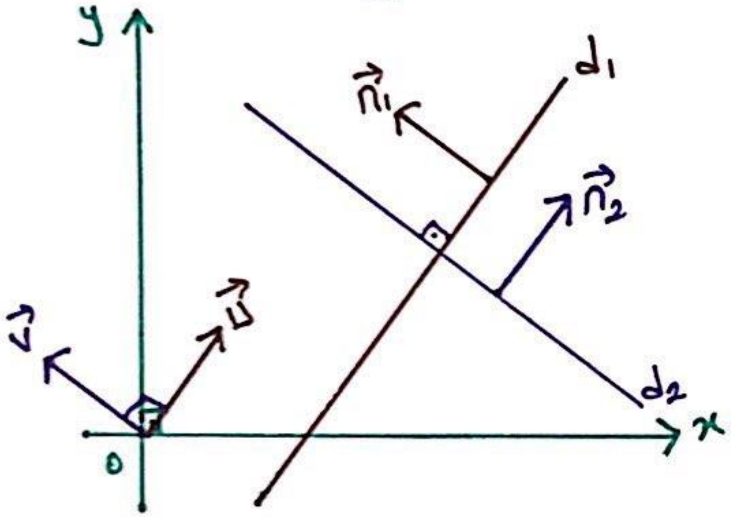
Örnek:

$d_1 \ldots \quad 2x + ay + 7 = 0$

$d_2 \ldots \quad x + (a-2)y - 2 = 0$

doğruların paralel olması için a ne olmalıdır?

Dik Doğrular



$d_1 \perp d_2 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0)$

$d_1 \perp d_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Örnek: $d_1 \cdots \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ $\quad d_2 \cdots \begin{cases} x = -1 + k\lambda \\ y = 5 + 4\lambda \end{cases}$

doğruların dik olması için λ ne olmalıdır?

Çözüm:

$\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (k,4)$ $\quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2k + 4 = 0 \Rightarrow k = -2$

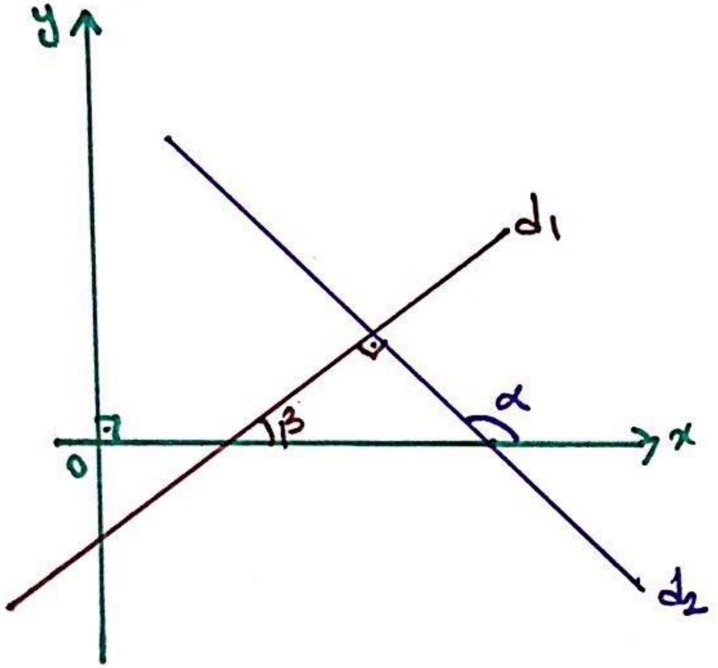
Not: $d_1 \dots A_1x+B_1y+C_1=0$, $d_2 \dots A_2x+B_2y+C_2=0$ genel denklemleriyle verilen doğruların diklik koşulunu bulalım:

$$\vec{n}_1=(A_1,B_1) \quad , \quad \vec{n}_2=(A_2,B_2)$$

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$$

Not: d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri, sırası ile, m_1 ve m_2 olmak üzere $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2=-1$ dir.

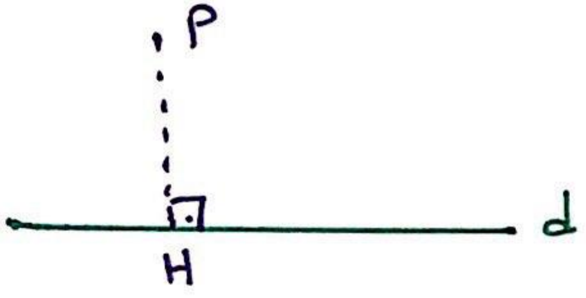


$m_1=\tan\beta$, $m_2=\tan\alpha$

$m_2=\tan\alpha=\tan(90^\circ+\beta)=-\cot\beta$

$\Rightarrow m_1 \cdot m_2=\tan\beta \cdot (-\cot\beta)=-1$ olur.

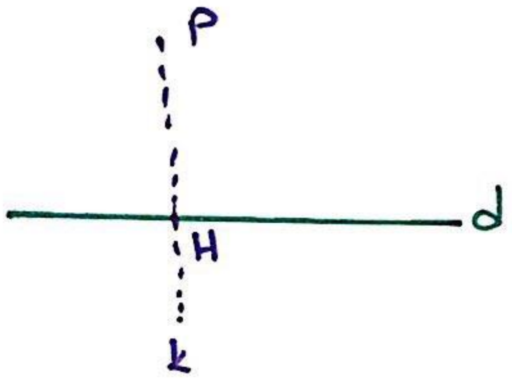
Bir Noktanın Bir Doğru Üzerine Dik İzdüşümü



Bir P noktasının d doğrusu üzerine olan H dik izdüşüm noktasını bulmak için P den geçen ve d ye dik olan doğru ile d doğrusunun denklemleri ortak çözülür.

Örnek: $P(5,3)$ noktasının $3x+4y-12=0$ doğrusu üzerine olan dik izdüşüm noktasını bulunuz.

Çözüm:



P den geçen ve d ye dik olan k doğrusunu bulalım: $m_d = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_k = \frac{4}{3}$

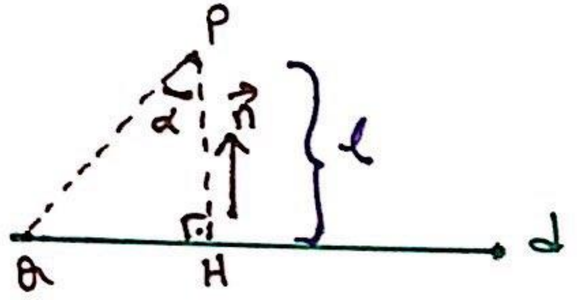
$\Rightarrow k \ldots y-3 = \frac{4}{3}(x-5)$

$\Rightarrow k \ldots 4x-3y-11=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3y-11=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ bulunur.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

$P(x_0,y_0)$ noktasının $d \ldots Ax+By+C=0$ doğrusuna olan uzaklığını bulalım:



$Q(x_1,y_1)\in d$ alalım.

$\Rightarrow Ax_1+By_1+C=0$ dır.

$\vec{PQ}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı α olmak üzere,

$$\langle \vec{PQ},\vec{n}\rangle = \|\vec{PQ}\|.\|\vec{n}\|.\cos\alpha$$
$$= \|\vec{PQ}\|.\|\vec{n}\|.\frac{\ell}{\|\vec{PQ}\|}$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{|\langle \vec{PQ},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|}$$ bulunur.

$\vec{PQ}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$, $\vec{n}=(A,B)$ $\Rightarrow$ $\ell = \dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\Rightarrow l = \frac{|Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$= \frac{|-Ax_0 - By_0 - C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Örnek: $P(3,5)$ noktasının $5x+12y+3=0$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 7