ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

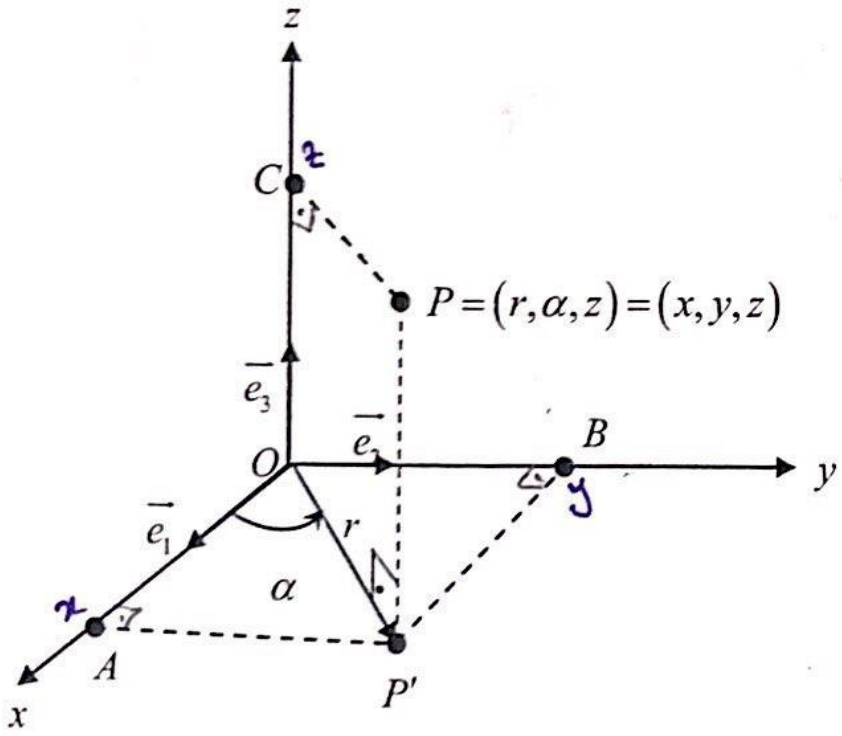
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

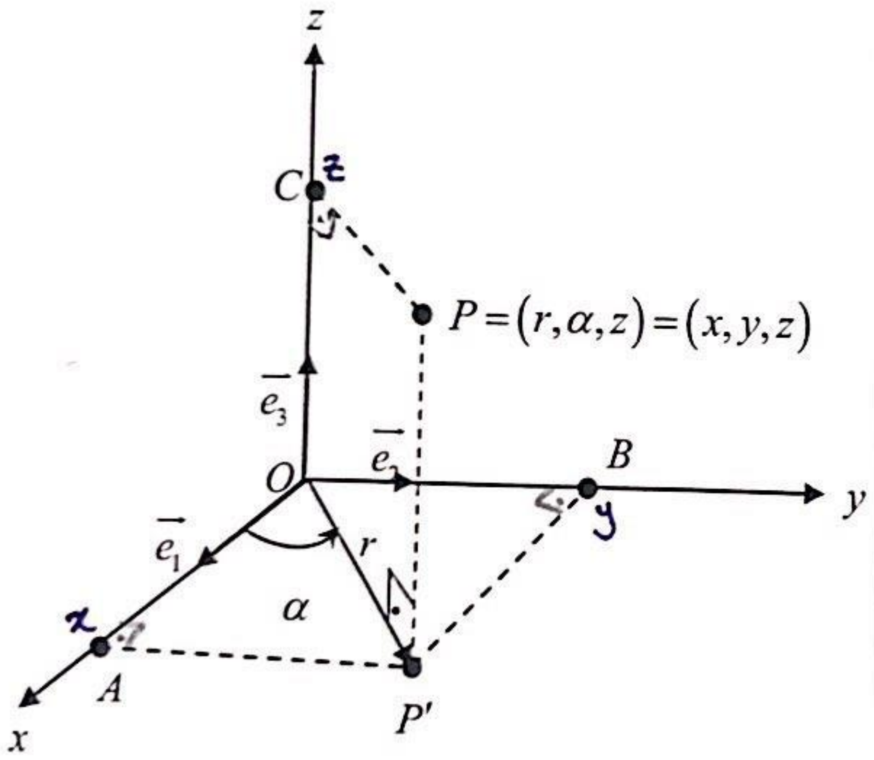
Ders 6

Uzayda Silindirik Koordinat Sistemi



Uzayda bir $P(x,y,z)$ noktası verilsin. P nin xoy düzlemine izdüşümü olan P' nün O ya olan uzaklığı r ve $\overrightarrow{OP'}$ nün x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere (r, α, z) üçlüsüne P nin silindirik koordinatları, bu koordinatları tanımlamada kullanılan koordinat sistemine de silindirik koordinat sistemi denir.

Kartezyen Koordinatlar ile Silindirik Koordinatlar Arasındaki Bağıntılar



$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \end{cases}}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \mp\sqrt{x^2+y^2}$$

Örnek: Silindirik koordinatlarda verilen $P(2, \frac{3\pi}{4}, -4)$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$r = 2, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad z = -4$$

$$x = r\cos\alpha = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\alpha = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4)$$

Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $P=(-1,1,3)$ noktasının silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$x=-1,\ y=1,\ z=3$$

$$r=\mp\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r=\mp\sqrt{2}$$

$$\alpha=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan(-1) \Rightarrow \alpha=135^\circ,\ 315^\circ$$

$r=\sqrt{2}$ için $\begin{array}{l} \overset{-}{x}=\overset{+}{r}\cos\alpha \\ \overset{+}{y}=\overset{+}{r}\sin\alpha \end{array} \Rightarrow \cos\alpha<0,\ \sin\alpha>0 \Rightarrow \alpha=135^\circ$

Benzer şekilde $r=-\sqrt{2}$ için $\alpha=315^\circ$ olur.

$$\Rightarrow P(r,\alpha,z)=(\sqrt{2},135^\circ,3)=(-\sqrt{2},315^\circ,3)$$

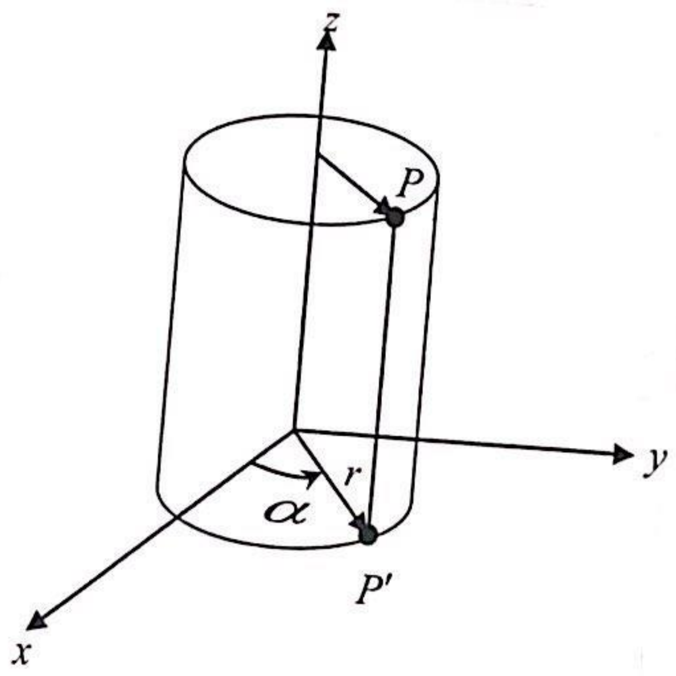
Örnek: Karteryen koordinatlarda verilen $P(3, 3\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ noktasının silindirik koordinatlarını bulunuz.

Cevap:

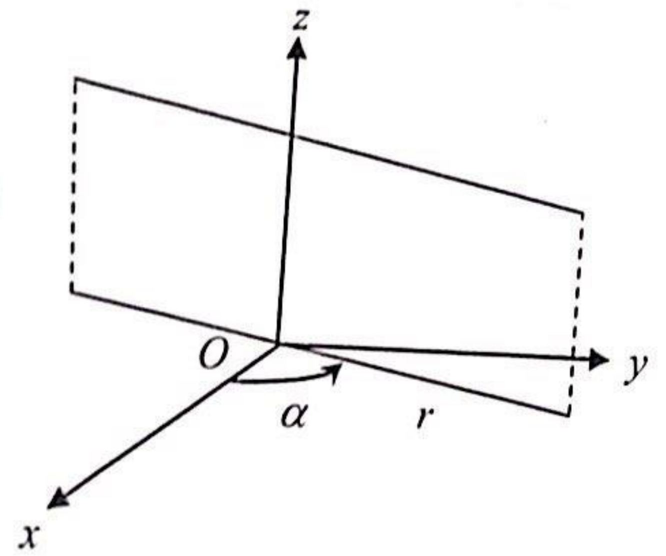
$$P\left(6, \frac{\pi}{3}, 6\sqrt{3}\right) = \left(-6, \frac{4\pi}{3}, 6\sqrt{3}\right)$$

İrdeleme

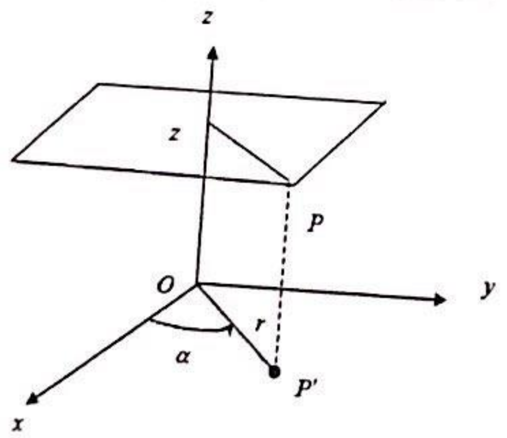
1) r=sabit olan P(r,α,z) noktaları r yarıçaplı silindir üzerinde bulunurlar.



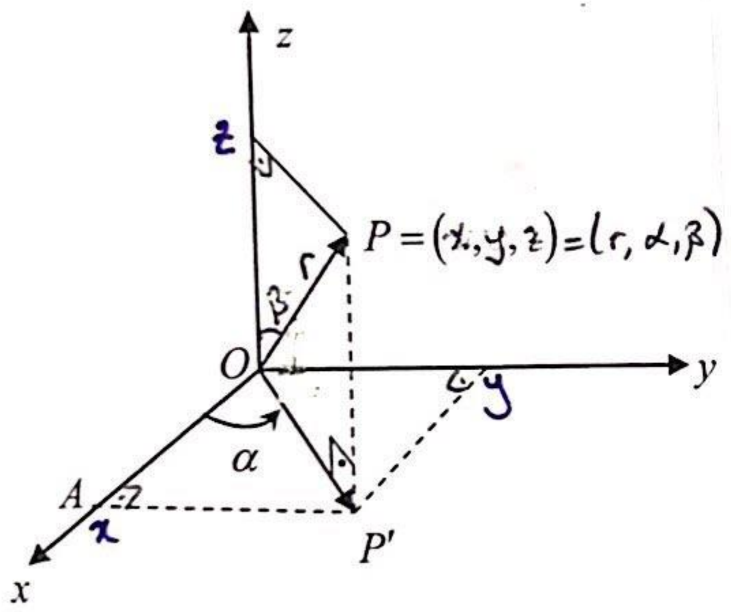
2) α=sabit olan $P(r,\alpha,z)$ noktaları x ekseni ile α açısı yapan ve z ekseninden geçen bir düzlem (yarı düzlem) üzerinde bulunurlar.



3) z=sabit olan $P(r,\alpha,z)$ noktaları z ekseninden geçen ve xoy düzlemine paralel olan düzlem üzerinde bulunurlar.

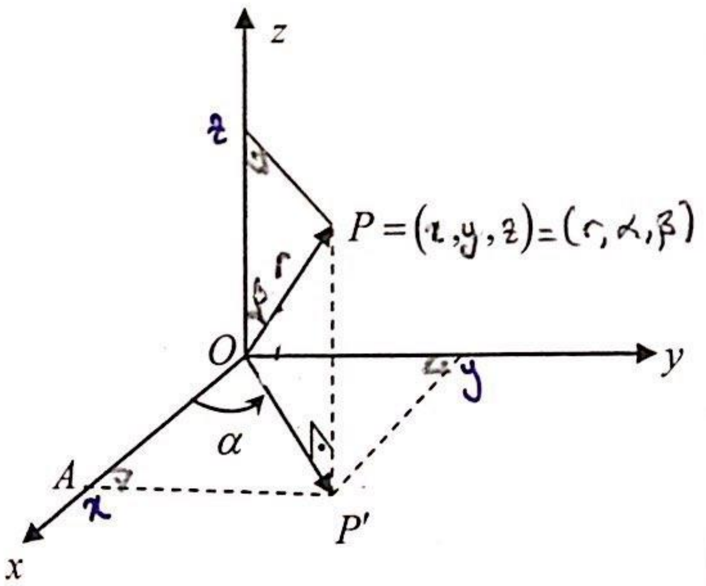


Uzayda Küresel Koordinat Sistemi



Uzayda bir $P(x,y,z)$ noktası verilsin. $\|OP\|=r$, P nin xOy düzlemine olan izdüşümü P' olmak üzere $\overrightarrow{OP'}$ nün x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı α, $\overrightarrow{OP}$ nin z ekseniyle yaptığı açı β olmak üzere, (r,α,β) üçlüsüne P nin küresel koordinatları, bu koordinatları tanımlamada kullanılan koordinat sistemine de küresel koordinat sistemi denir.

Kartezyen Koordinatlar ile Küresel Koordinatlar Arasındaki Bağıntılar



$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\overrightarrow{OP'}\|} \Rightarrow x = \|OP'\| \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{\|\overrightarrow{OP'}\|} \Rightarrow y = \|OP'\| \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\beta$$

$$\sin\beta = \frac{\|\overrightarrow{OP'}\|}{r} \Rightarrow \|\overrightarrow{OP'}\| = r\sin\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases}}$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \rightarrow r = \mp\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{z}{r} \rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

Örnek: Küresel koordinatlarda verilen $P(2, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$r = 2 \,,\; \alpha = \frac{3\pi}{4} \,,\; \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = r\cos\alpha\sin\beta = 2\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = -1$$

$$y = r\sin\alpha\sin\beta = 2\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 1$$

$$z = r\cos\beta = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow P(-1, 1, \sqrt{2})$ olur.

Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $P(1,-1,-\sqrt{2})$ noktasının küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$x=1,\ y=-1,\ z=-\sqrt{2}$

$$r=\mp\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow r=\mp 2$$

$$\alpha=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan(-1) \Rightarrow \alpha=135^\circ, 315^\circ$$

$$\beta=\arccos\left(\frac{z}{r}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\mp 2}\right) \Rightarrow \beta=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

1) $r=2$ olsun

$$\begin{array}{ccc} & r=2 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha=135^\circ & & \alpha=315^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta=225^\circ & & \beta=135^\circ \end{array}$$

$$\begin{cases} \overset{+}{x}=\overset{+}{r}\,\overset{-}{\cos\alpha}\,\sin\beta \\ \overset{-}{y}=\overset{+}{r}\,\overset{+}{\sin\alpha}\,\sin\beta \\ \overset{-}{z}=\overset{+}{r}\cos\beta \end{cases} \qquad (\alpha=135^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos\beta<0,\ \sin\beta<0 \Rightarrow \beta=225^\circ$$

$$\begin{cases} \overset{+}{x}=\overset{+}{r}\,\overset{+}{\cos\alpha}\,\sin\beta \\ \overset{-}{y}=\overset{+}{r}\,\overset{-}{\sin\alpha}\,\sin\beta \\ \overset{-}{z}=\overset{+}{r}\cos\beta \end{cases} \qquad (\alpha=315^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos\beta<0,\ \sin\beta>0 \Rightarrow \beta=135^\circ$$

2) $r=-2$ olsun

$$\alpha = 135^\circ \;\rightarrow\; \beta = 45^\circ \qquad\qquad \alpha = 315^\circ \;\rightarrow\; \beta = 315^\circ$$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases} \qquad (\alpha = 135^\circ)$$

$$\Rightarrow \sin\beta > 0,\quad \cos\beta > 0 \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases} \qquad (\alpha = 315^\circ)$$

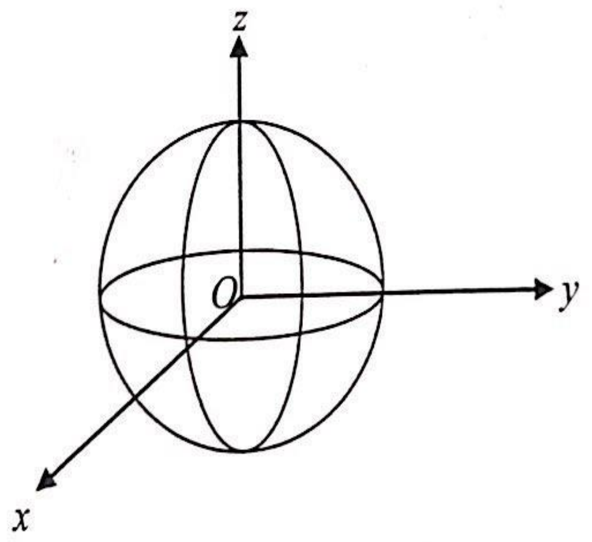
$$\Rightarrow \sin\beta < 0,\quad \cos\beta > 0 \Rightarrow \beta = 315^\circ$$

$$\Rightarrow P(2, 135^\circ, 225^\circ) = (2, 315^\circ, 135^\circ) = (-2, 135^\circ, 45^\circ) = (-2, 315^\circ, 315^\circ)$$

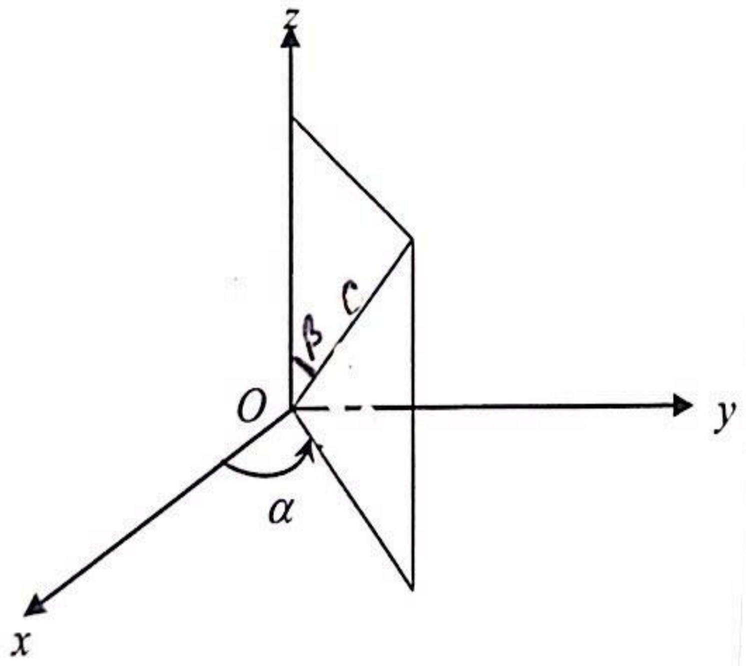
bulunur.

İrdeleme :

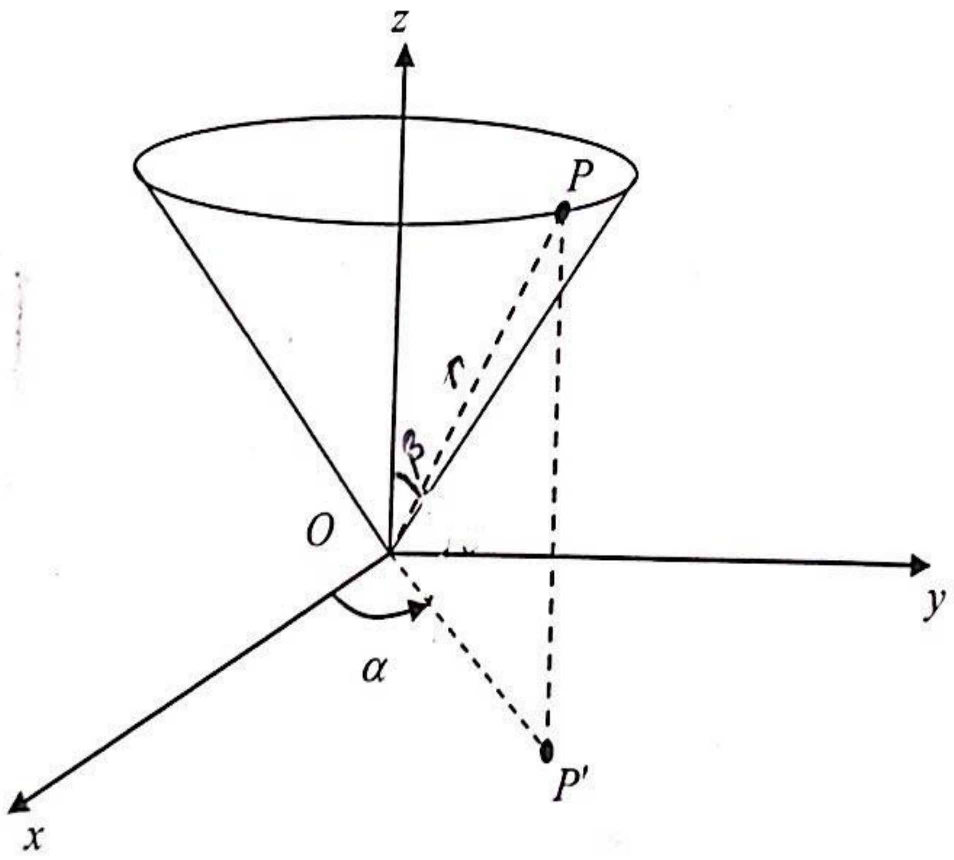
1) r = sabit olan $P(r, \alpha, \beta)$ noktaları O merkezli ve r yarıçaplı küre üzerinde bulunurlar.



2) α = sabit olan $P(r, \alpha, \beta)$ noktaları z ekseninden geçen ve xOz düzlemi ile sabit α açısı yapan düzlem üzerinde bulunurlar.



3) β = sabit olan $P(r, \alpha, \beta)$ noktaları, tepe noktası orijin olan koni üzerinde bulunurlar.



Örnek: Küresel koordinatları $P(2, \pi/3, \pi/4)$ olan noktanın silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

Noktanın önce kartezyen koordinatlarını bulalım:

$r = 2,\ \alpha = \pi/3,\ \beta = \pi/4$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta = 2\cos(\pi/3)\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ y = r\sin\alpha\sin\beta = 2\sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = \sqrt{6}/2 \\ z = r\cos\beta = 2\cos(\pi/4) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ P nin kartezyen koordinatları $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right)$ dir.

Şimdi bu noktanın silindirik koordinatlarını bulalım:

$x = \sqrt{2}/2,\ y = \sqrt{6}/2,\ z = \sqrt{2}$ $\qquad r = \mp\sqrt{x^2+y^2} = \mp\sqrt{2}$

$\alpha = \arctan(y/x) = \arctan\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0, 240^0$

$r = \sqrt{2}$ için $\begin{cases} \overset{+}{x} = \overset{+}{r}\cos\alpha \\ \overset{+}{y} = \overset{+}{r}\sin\alpha \end{cases}$ olup $\cos\alpha > 0, \sin\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = 60^0$ olur.

$r = -\sqrt{2}$ için $\alpha = 240^0$ olur.

O halde,

$$P(r, \alpha, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}, \sqrt{2}\right)$$

bulunur.

Örnek: Silindirik koordinatları $P\left(-6, \frac{2\pi}{3}, 6\sqrt{3}\right)$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Cevap:

$$P\left(12, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(12, \frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right) = \left(-12, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) = \left(-12, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$$

Örnek: Küresel koordinatlarda verilen $2\tan^2\beta = 1$ denkleminin kartezyen koordinatlardaki karşılığını bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\sin\beta \\ y = r\sin\alpha\sin\beta \\ z = r\cos\beta \end{cases}$$ olduğunu biliyoruz.

$$2\tan^2\beta = 1 \Rightarrow 2\sin^2\beta = \cos^2\beta$$
$$\Rightarrow 2r^2\sin^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 2r^2\cos^2\beta$$
$$\Rightarrow 2r^2\sin^2\beta\cos^2\alpha + 2r^2\sin^2\beta\sin^2\alpha = 2r^2\cos^2\beta$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 2z^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Örnek: Karteryen koordinatları $P(1,1,-\sqrt{2})$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Cevap: $P\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = \left(2, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) = \left(-2, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-2, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 6