



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

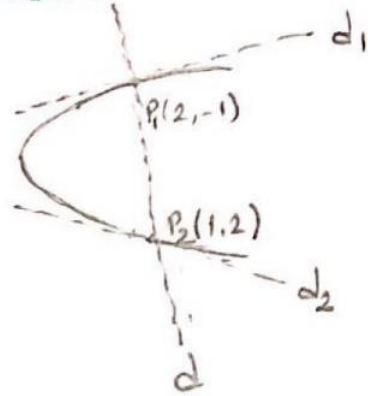
Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 14

**Örnek:**  $P_1(2, -1)$  noktasında  $d_1 \dots x + 2y = 0$  ve  $P_2(1, 2)$  noktasında  $d_2 \dots 2x - y = 0$  doğrularına teğet olan parabolün denklemini bulunuz.

**Çözüm**



$$\Phi_1(x, y) = d_1 \cdot d_2 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_1(x, y) = x^2 + xy - y^2 = 0 \text{ olur.}$$

$P_1 - P_2$  den geçen doğru,

$$d \dots 3x - y - 7 = 0$$

$$\Phi_2(x, y) = d \cdot d = 0 \Rightarrow \Phi_2(x, y) = 9x^2 - 6xy + y^2 - 42x + 14y + 49 = 0$$

0 halde konik ailesi

$$\lambda_1(x^2 + xy - y^2) + \lambda_2(9x^2 - 6xy + y^2 - 42x + 14y + 49) = 0$$

$$\Rightarrow (2\lambda_1 + 9\lambda_2)x^2 + 2(\lambda_1 - 3\lambda_2)xy + (-2\lambda_1 + \lambda_2)y^2 - 42\lambda_2x + 14\lambda_2y + 49\lambda_2 = 0$$

$$4AC - B^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_2$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ için } 9x^2 - 6xy + y^2 - 42x + 14y + 49 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_2 \text{ için } 16x^2 - 34xy + 4y^2 - 84x + 28y + 98 = 0 \text{ olur.}$$

**Örnek:**  $P_1(3,1)$  noktasında  $d_1 \dots x-3=0$  ve  $P_2(1,3)$  noktasında  $d_2 \dots x-1=0$  doğrularına teğet olan ve  $P(2,5)$  noktasından geçen konik denklemini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\Phi_1(x,y) = d_1 \cdot d_2 = 0 \Rightarrow \Phi_1(x,y) = x^2 - 4x + 3 \text{ olur.}$$

$P_1$  ve  $P_2$  den geçen doğru  $d \dots x+y-2=0$  olmak üzere

$$\Phi_2(x,y) = d \cdot d = 0 \Rightarrow \Phi_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \text{ olur.}$$

O halde konik ailesi,

$$\lambda_1(x^2 - 4x + 3) + \lambda_2(x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4) = 0 \text{ olur.}$$

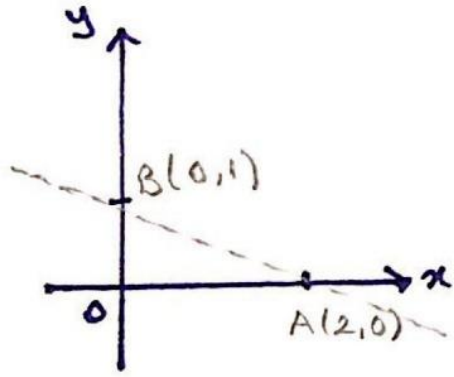
$P(2,5)$  noktasından geçeceğinden  $\lambda_1 = 25\lambda_2$  bulunur.

Yerine yazılırsa

$$26x^2 + 2xy + y^2 - 104x - 4y + 79 = 0 \text{ olur.}$$

**Örnek:**  $A(2,0)$  noktasında  $x$  eksenine,  $B(0,1)$  noktasında  $y$  eksenine teğet olan koniklerden  $d \dots x - y + 2 = 0$  doğrusuna teğet kabul eden koniğin denklemini bulunuz.

**Çözüm:**



$$\phi_1(x,y) = x \cdot y = 0 \text{ olur.}$$

$A$  ve  $B$  den geçen doğru  $x + 2y - 2 = 0$  dir.

$$0 \text{ halde } \phi_2(x,y) = (x + 2y - 2)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

olup konik ailesi,

$$\lambda_1(x,y) + \lambda_2(x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4) = 0 \text{ olur.}$$

düzenlenirse  $\lambda_2 x^2 + (\lambda_1 + 4\lambda_2)xy + 4\lambda_2 y^2 - 4\lambda_2 x - 8\lambda_2 y + 4\lambda_2 = 0$  bulunur.

Bu koniklerden  $y = x + 2$  doğrusuna teğet olanı bulalım.  $y = x + 2$  aile denkleminde yerine yazılırsa,

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2)x^2 + (2\lambda_1 + 12\lambda_2)x + 4\lambda_2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$(\lambda_1 + 9\lambda_2)x^2 + (2\lambda_1 + 12\lambda_2)x + 4\lambda_2 = 0$  idi. Teğet olma koşulundan,

$$(2\lambda_1 + 12\lambda_2)^2 - 4(\lambda_1 + 9\lambda_2) \cdot 4\lambda_2 = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(\lambda_1 + 8\lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ veya } \lambda_1 = -8\lambda_2 \text{ bulunur.}$$

0 halde istenilen konikler,

$$\lambda_1 = 0 \text{ için } x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -8\lambda_2 \text{ için } x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek:  $y$  eksenini asimptot kabul eden ve  $x$  eksenine  $P(1,0)$  noktasında teğet olan hiperbol ailesinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Konik denklemi  $\Phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  olsun.

$\Phi_x = 2Ax + By + D$ ,  $\Phi_y = Bx + 2Cy + E$  ve asimptotik doğrultu  $m$  olmak üzere asimptotun denklemi,

$$\begin{aligned}\Phi_x + m\Phi_y = 0 &\Rightarrow 2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + E) = 0 \\ &\Rightarrow x + \frac{B+2mC}{2A+mB}y + \frac{D+mE}{2A+mB} = 0\end{aligned}$$

bulunur.

Asimptot  $y$  eksenini olacağından denklemi  $x=0$  olmalıdır.

$$\Rightarrow B + 2mc = 0 \Rightarrow m = -\frac{B}{2C}$$

$$D + mE = 0 \Rightarrow m = -\frac{D}{E} \text{ olur.}$$

Asimptotik doğrultu için  $m = \infty$  olacağından  $C = E = 0$  olmalıdır.

0 halde konik denklemi,

$$Ax^2 + Bxy + Dx + F = 0 \text{ olur.}$$

$P(1,0)$  noktasında  $x$  eksenine teğet olduğundan  $P(1,0)$  denklemi sağlar. 0 halde  $A + D + F = 0$  dir.

$x$  ekseninin denklemi  $y=0$  olup teğet olma koşulundan

$$Ax^2 + Dx + F = 0$$

$$\Rightarrow D^2 - 4AF = 0 \Rightarrow F = \frac{D^2}{4A} \text{ bulunur.}$$

$A + D + F = 0$  ve  $F = \frac{D^2}{4A}$  dan,

$$A + D + \frac{D^2}{4A} = 0 \Rightarrow (D + 2A)^2 = 0$$

$$\Rightarrow D = -2A$$

$$\Rightarrow F = \frac{D^2}{4A} = A \text{ olur.}$$

$$Ax^2 + Bxy + Dx + F = 0 \Rightarrow Ax^2 + Bxy - 2Ax + A = 0$$

$\lambda = A/B$  alınırsa  $\lambda x^2 + xy - 2\lambda x + \lambda = 0$  bulunur.  $4AC - B^2 < 0$  olup

bu bir hiperbol ailesidir.

**Örnek:**  $\Phi_1(x,y) = 3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$

$\Phi_2(x,y) = 3x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 10 = 0$

Koniklerin ortak kesit noktalarından geçen konik ailesinin denklemini yazınız, parametrenin alacağı değerlere göre koniklerin sınıfını belirleyiniz.

**Çözüm:**  $\lambda_1 \Phi_1(x,y) + \lambda_2 \Phi_2(x,y) = 0$  veya  $\Phi_1(x,y) + \lambda \Phi_2(x,y) = 0$

$3(\lambda+1)x^2 - 4(\lambda+1)y^2 + 6(2-\lambda)x + 8(1-\lambda)y - 2(2+5\lambda) = 0$

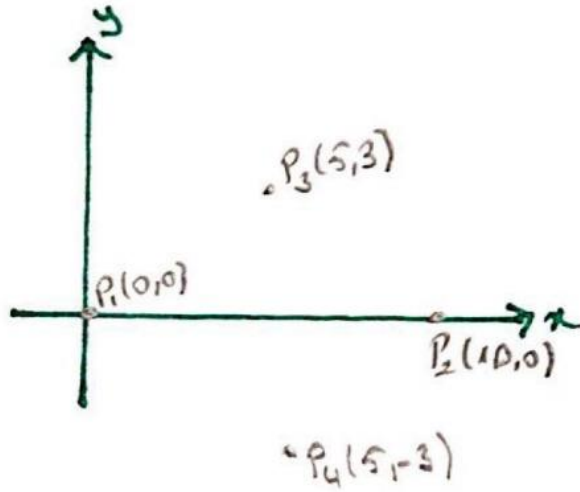
$4AC - B^2 = -36(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$\lambda$	-1
$\Delta$	Hiperbol sınıfı
	↓ parabol sınıfı



Örnek:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(10,0)$ ,  $P_3(5,3)$  noktalarından geçen ve  $x$  eksenine göre simetrik olan koniğin denklemini yazınız.

Yol Gösterme:



Konik  $x$  eksenine göre simetrik olduğundan  $P_4(5,-3)$  noktasında konik üzerinde olacaktır. Bu 4 noktadan geçen konik ailesi yazılacaktır.  
( $9x^2 - 25y^2 - 90x = 0$ )

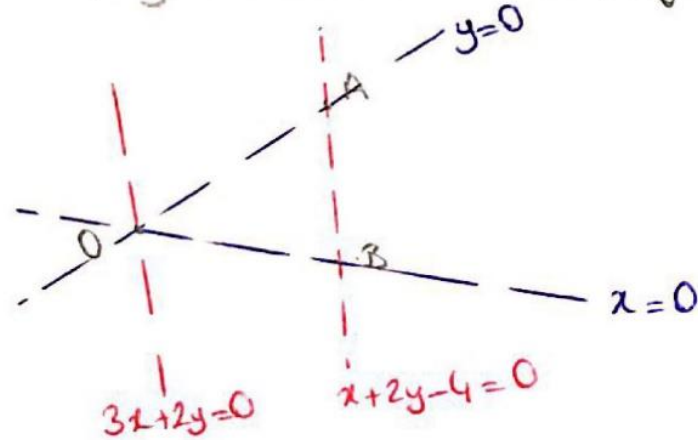
**Örnek:**  $O(0,0)$ ,  $A(4,0)$ ,  $B(0,2)$  noktalarından geçen ve  $O$  noktasındaki normaleri  $N(3,2)$  noktasından geçen koniklerin genel denklemini bulunuz.

**Çözüm:**

$O(0,0)$  ve  $N(3,2)$  den geçen normalin eğimi  $m_N = 2/3$

O halde koninin  $O(0,0)$  daki teğetinin denklemi  $m_T = -3/2$  olur.

Teğetin denklemi  $3x + 2y = 0$  dir.



$$\phi_1(x,y) = (3x+2y)(x+2y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \phi_1(x,y) = 3x^2 + 8xy + 4y^2 - 12x - 8y = 0$$

$$\phi_2(x,y) = xy = 0$$

Konik ailesi ise

$$\lambda_1 \phi_1(x,y) + \lambda_2 \phi_2(x,y) = 0 \text{ olur.}$$

**Örnek:**  $x+y-1=0$  ve  $x-y=0$  doğrularını asimptot kabul eden hiperbol ailesinin denklemini bulunuz. Hiperbol ailesinin orijinden geçen hiperbollerini tespit ediniz.

**Çözüm:**

$$\left. \begin{array}{l} x+y-1=0 \Rightarrow m=-1 \\ x-y=0 \Rightarrow m=1 \end{array} \right\} \text{asimptotik doğrultular.}$$

Asimptotik doğrultular arasındaki bağıntı  $Cm^2+Bm+A=0$  idi

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} C-B+A=0 \\ C+B+A=0 \end{array} \right\} B=0 \text{ ve } C=-A \text{ olur.}$$

O halde koniğimiz  $Ax^2 - Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$  şeklindedir.

Asimptotlar için  $\phi_x + 1\phi_y = 0$ ,  $\phi_x + (-1)\phi_y = 0$ .

$\phi_x + 1\phi_y = 0$  dan  $2Ax - 2Ay + D + E = 0$  olup  $x-y=0$  ile karşılaştırırsak

$$D + E = 0 \Rightarrow D = -E \quad (1)$$

$\phi_x + (-1)\phi_y = 0$  dan  $2Ax + 2Ay + D - E = 0$  olup  $x + y - 1 = 0$  ile karşılastırırsak

$$2A = 2A = E - D$$

$$\Rightarrow E - D = 2A \dots (2)$$

(1) ve (2) den  $A = E$  olur. O halde konimiziz,

$$Ax^2 - Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ dan}$$

$$Ax^2 - Ay^2 - Ax + Ay + F = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - x + y + F/A = 0 \quad (A \neq 0)$$

$4AC - B^2 = -4 < 0$  olup konik hiperbol sınıfındadır.

$(0,0)$  dan geçen iye için  $F/A = 0$  olacaktır

$$x^2 - y^2 - x + y = 0 \text{ bulunur.}$$



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



13

Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü  
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 14