ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

KONİK AİLELERİ

$\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemli M koniği verilsin. Burada A, B ve C den en az biri sıfırdan farklıdır. $A \neq 0$ olsun.

$$\Rightarrow x^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \lambda_1 xy + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 x + \lambda_4 y + \lambda_5 = 0$$ bulunur.

O halde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ve λ_5 katsayıları bilinirse konik bellidir. Bunun için de koniğe ait 5 bağıntı bilinmelidir. O halde 5 farklı noktadan bir tek konik geçer.

Örnek $P_1(1,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$, $P_4(1,-1)$ ve $P_5(2,1)$ noktalarından geçen koniğin denklemini yazınız.

Çözüm: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

P_1 için $\quad A+B+C+D+E+F=0$

P_2 için $\quad C-E+F=0$

P_3 için $\quad A+D+F=0$

P_4 için $\quad A-B+C+D-E+F=0$

P_5 için $\quad 4A+2B+C+2D+E+F=0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1: \alpha_3 \to \alpha_3 + (-1)\alpha_1$

$\alpha_4 \to \alpha_4 + (-1)\alpha_1$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-4)\alpha_1$

$$\overset{\varepsilon_1}{\approx}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_2: \alpha_3 \to (-1)\alpha_3$

$\alpha_4 \to -\frac{1}{2}\alpha_4$

$\alpha_5 \to (-1)\alpha_5$

$$\overset{\varepsilon_2}{\approx}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_3: \alpha_3 \to \alpha_3 + (-1)\alpha_2$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-3)\alpha_2$

$\alpha_1 \to \alpha_1 + (-1)\alpha_2$

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_4: \alpha_4 \to \alpha_4 + (-1)\alpha_3$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-2)\alpha_3$

$\alpha_1 \to \alpha_1 + (-1)\alpha_3$

$$\overset{\varepsilon_4}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_5 : \alpha_5 \to \frac{1}{2}\alpha_5$

$\alpha_4 \to \frac{1}{3}\alpha_4$

$$\overset{\varepsilon_5}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_6 : \alpha_1 \to \alpha_1 + (-4)\alpha_4$

$\alpha_2 \to \alpha_2 + 1\,\alpha_4$

$\alpha_3 \to \alpha_3 + 2\,\alpha_4$

$\alpha_5 \to \alpha_5 + (-2)\alpha_4$

$$\overset{\varepsilon_6}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_7 : \alpha_1 \to \alpha_1 + (-1)\alpha_5$

$$\underset{E_7}{\approx}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \underset{E_8}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$ olur.

$\Rightarrow A+\frac{1}{3}F=0,\ B-1/3F=0,\ C+4/3F=0,\ D-2/3F=0,\ E+1/3F=0$

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}Fx^2+\frac{1}{3}Fxy-\frac{4}{3}Fy^2+\frac{2}{3}Fx-\frac{1}{3}Fy+F=0$

$\Rightarrow x^2-xy+4y^2-2x+y-1=0$ bulunur.

Bu beş koşuldan biri veya bir kaçı verilmezse bir konik yerine bir konik ailesi elde edilir.

Şimdi P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktalarının verilmesiyle konik ailesinin nasıl elde edilebileceğini inceleyeceğiz:

I. Yol: P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktalarının konik denkleminde yerine yazılmasıyla dört denklem elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesiyle iki parametreye bağlı çözümler elde edilir. Bu çözümler konik denkleminde yerine yazılarak konik ailesi elde edilir.

Bunu bir örnek ile açıklayalım:

Örnek: $P_1(0,0)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$ ve $P_4(1,-1)$ noktalarından geçen konik ailesinin denklemini bulunuz. Ailede çember, ikizkenar hiperbol, parabol var mıdır?

Çözüm: Koniğin denklemi $\phi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ olsun.

P_1 için $F = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} P_2 \text{ için} & C - E = 0 \Rightarrow C = E \\ P_3 \text{ için} & A + D = 0 \Rightarrow A = -D \\ P_4 \text{ için} & A - B + C + D - E = 0 \end{array}\right\} B = 0 \text{ olur.}$$

$\Rightarrow A = -D$, $C = E$ ve $B = 0$ dır. O halde konik,

$-Dx^2 + Ey^2 + Dx + Ey = 0$ konik ailesi bulunur.

i) Ailede Çember var mıdır?

$A = C$ ve $B = 0$ olmalı. O halde $-D = E$ için çember elde edilir.

$$\Rightarrow Ex^2 + Ey^2 - Ex + Ey = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x + y = 0 \text{ ailedeki çemberdir.}$$

ii) Ailede ikizkenar hiperbol var mıdır?

$A=-C$ olmalıdır. Yani,

$$-Dx^2+Ey^2+Dx+Ey=0 \text{ için } D=E \text{ olmalıdır.}$$

$\Rightarrow -x^2+y^2+x+y=0$ ailedeki ikizkenar hiperboldür.

iii) Ailede parabol var mıdır?

$4AC-B^2=0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow 4(-D)E-0=0 \Rightarrow D=0 \text{ veya } E=0 \text{ bulunur.}$$

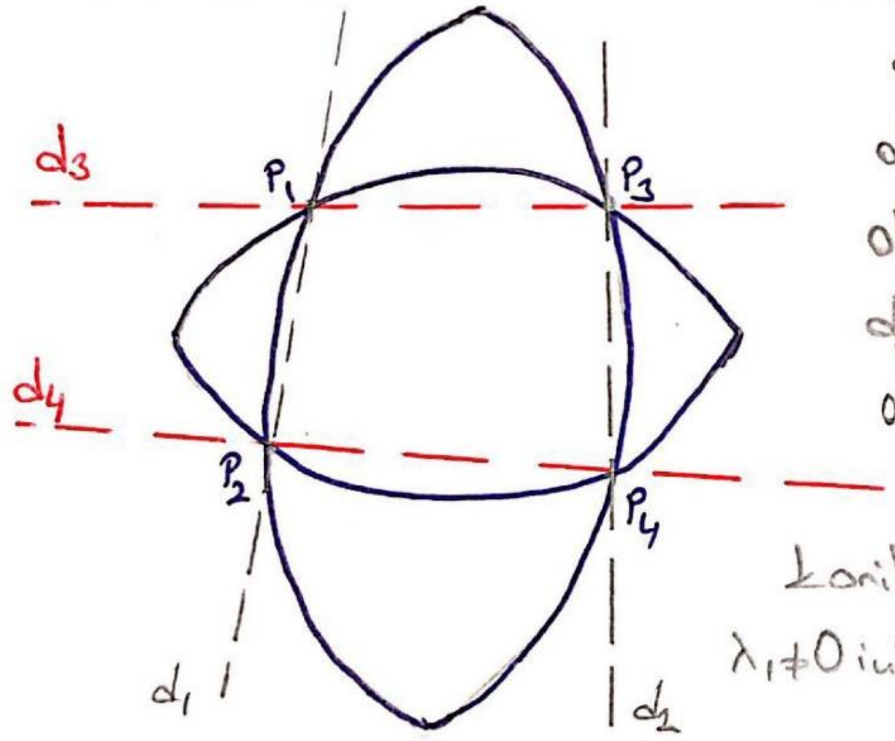
$D=0$ için parabol $y^2+y=0$

$E=0$ için parabol $-x^2+x=0$ olur.

II. YOL:

1) $P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_4$ olsun.

P_1, P_2, P_3 ve P_4 noktalarından geçen iki konik $\Phi_1(x,y)=0$ ve $\Phi_2(x,y)=0$ ise bu 4 noktadan geçen tüm koniklerin (konik ailesinin) denklemi, $\lambda_1 \Phi_1(x,y) + \lambda_2 \Phi_2(x,y) = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu denklem de bir konik denklemidir ve P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarından geçer.



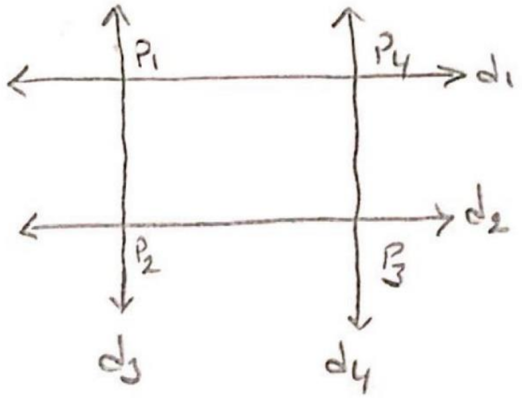
$d_1 \cdot d_2 = 0$ x veya y ye göre 2. dereceden olup bir konik belirtir. Bu konik $\Phi_1(x,y)=0$ olsun. P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları bu konik üzerindedir. $d_3 \cdot d_4 = 0$ bir konik belirtir. Bu konik $\Phi_2(x,y)=0$ olsun. P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları bu konik üzerindedir.

O halde bu dört noktadan geçen konik ailesi: $\lambda_1 \Phi_1(x,y) + \lambda_2 \Phi_2(x,y) = 0$ dır.

$\lambda_1 \neq 0$ için $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ alınırsa $\Phi_1(x,y) + \lambda \Phi_2(x,y) = 0$ olur.

Örnek: $P_1(-4,0)$, $P_2(0,4)$, $P_3(0,-4)$, $P_4(5,6)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm: Önce bu dört noktadan geçen konik ailesini bulalım:



$d_1 \ldots \quad 2x-3y+8=0$

$d_2 \ldots \quad x=0$

$d_3 \ldots \quad x-y+4=0$

$d_4 \ldots \quad 2x-y-4=0$ olur.

d_1 ve d_2 nin belirttiği konik $\Phi_1(x,y)=d_1 \cdot d_2=0$

$$\Rightarrow \Phi_1(x,y)=2x^2-3xy+8x=0$$

d_3 ve d_4 ün belirttiği konik $\Phi_2(x,y)=d_3 \cdot d_4=0$

$$\Rightarrow \Phi_2(x,y)=2x^2-3xy+y^2+4x-16=0$$

bulunur.

O halde bu dört noktadan geçen konik ailesi,

$$\phi_1(x,y)+\lambda\phi_2(x,y)=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-3xy+8x+\lambda(2x^2-3xy+y^2+4x-16)=0$$

$$\Rightarrow (2+2\lambda)x^2-3(\lambda+1)xy+\lambda y^2+4(2+\lambda)x-16\lambda=0 \text{ olur.}$$

Parabol için $4AC-B^2=0$

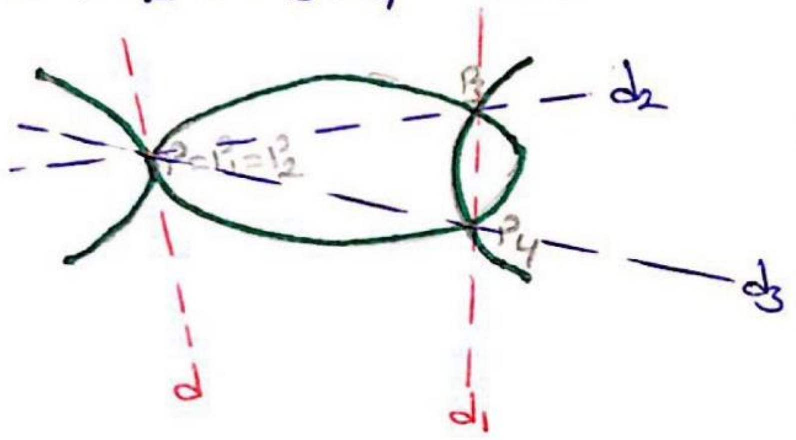
$$\Rightarrow 4(2+2\lambda)\lambda-(3\lambda+3)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=-9 \text{ bulunur.}$$

$\lambda=-1$ için parabol $y^2-4x-16=0$

$\lambda=-9$ için parabol $16x^2-24xy+9y^2+28x-144=0$ olur.

2) $P_1 = P_2$ ve $P_3 \neq P_4$ olsun.

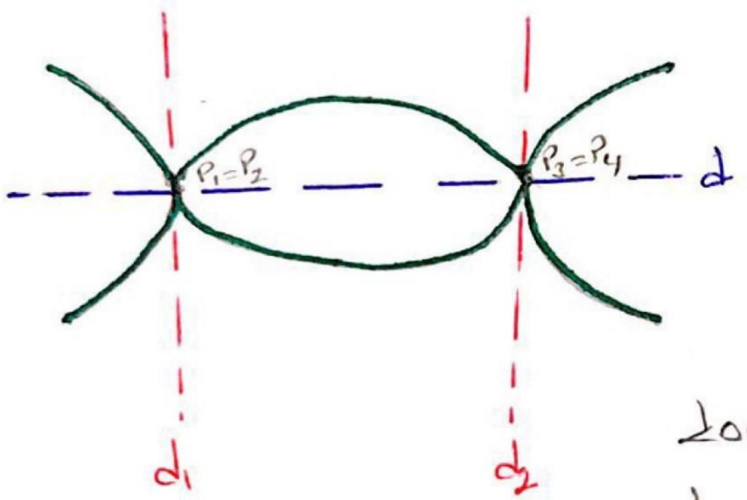


Bu durumda ailedeki konikler $P=P_1=P_2$ noktasında teğettirler. teğet doğrusu d, $P-P_3$ ün belirttiği doğru d_2, $P-P_4$ ün belirttiği doğru d_3 ve P_3-P_4 ün belirttiği doğru d_1 olmak üzere

$\phi_1(x,y) = d.d_1 = 0$, $\phi_2(x,y) = d_2 . d_3 = 0$ birer konik olup bu dört noktadan geçer. O halde konik ailesi,

$$\phi_1(x,y) + \lambda \phi_2(x,y) = 0 \text{ olur.}$$

3) $P_1 = P_2$ ve $P_3 = P_4$ olsun

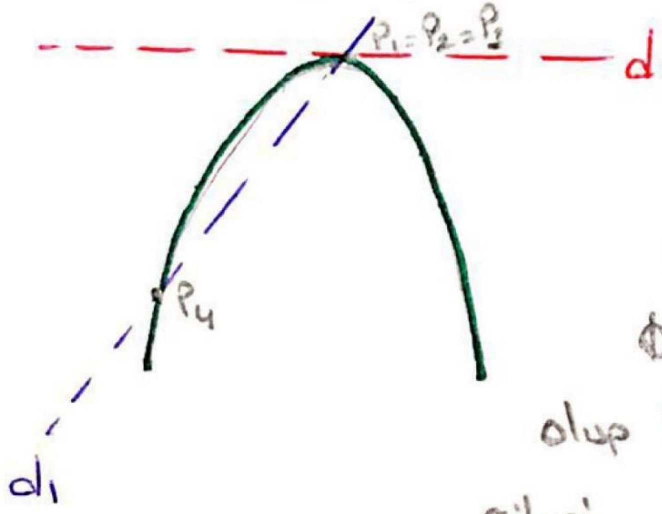


Bu durumda ailedeki konikler P_1 ve P_3 noktalarında teğet olurlar. P_1 ve P_3 deki teğet doğruları d_1 ve d_2 olsun. Ayrıca $P_1 - P_3$ ün belirttiği doğru d olmak üzere,

$\phi_1(x,y) = d.d = 0$, $\phi_2(x,y) = d_1.d_2 = 0$ birer konik olup bu dört noktadan geçer. O halde, konik ailesi

$$\phi_1(x,y) + \lambda\phi_2(x,y) = 0$$ olur.

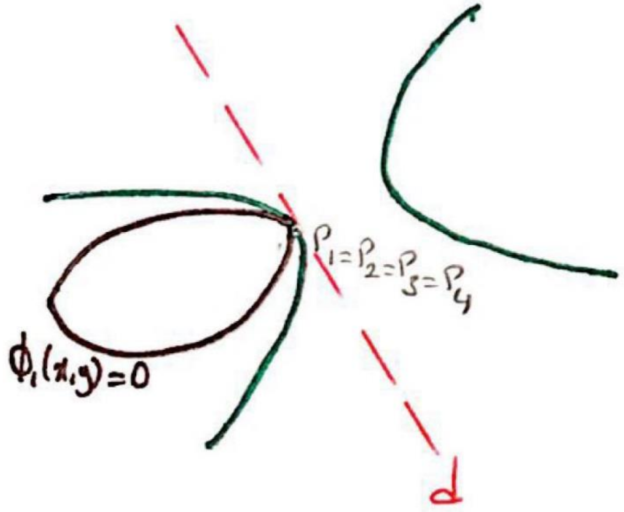
4) $P_1 = P_2 = P_3 \neq P_4$ olsun



Bu durumda ailedeki koniklerin $P_1 = P_2 = P_3$ deki teğetleri aynıdır. Bu teğet doğrusu d olsun. Ayrıca $P_1 - P_4$ ün belirttiği doğru d_1 olmak üzere $\Phi_1(x,y) = d_1^2 = 0$, $\Phi_2(x,y) = d_1 . d = 0$ birer konik olup bu dört noktadan geçer. O halde konik ailesi

$$\Phi_1(x,y) + \lambda \Phi_2(x,y) = 0 \text{ olur.}$$

5) $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ olsun



Bu durumda konikler $P_1=P_2=P_3=P_4$ noktasında teğettirler. Teğet doğrusu d olsun. Ayrıca bu durumda ailedeki koniklerden biri verilmelidir. Bu konik $\phi_1(x,y)=0$ ve $\phi_2(x,y)=d.d=0$ olmak üzere konik ailesi,

$$\phi_1(x,y)+\lambda\phi_2(x,y)=0 \text{ olur.}$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 13