UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

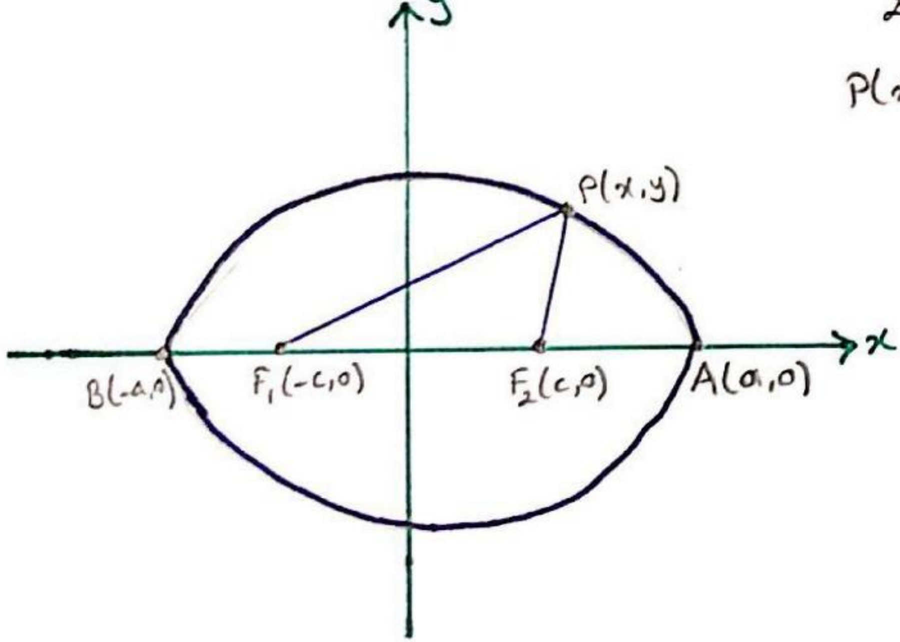
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10

KONİKLERDE ODAK VE DOĞRULTMAN

Merkezil Elipste Odak ve Doğrultman

Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine elips, bu sabit noktalara da elipsin odakları adı verilir. Şimdi, odakları $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan elipsin denklemini bulalım:



Elips üzerinde herhangi bir $P(x,y)$ noktasını alalım. Tanımdan,

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a = \text{sabit}$$

($P=A$ alınırsa,

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = a+c+a-c = 2a)$$

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a \quad , \; P(x,y),\; F_1(-c,0),\; F_2(c,0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+2xc+\underline{c^2}+\cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \underline{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow a^4 - 2\cancel{a^2x}c + x^2c^2 = a^2x^2 - 2\cancel{a^2x}c + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$a > c$ olduğundan $a^2 > c^2$ olur. $a^2 - c^2 = b^2$ alınırsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ elde edilir.

Şimdi elipste doğrultman kavramını ele alalım:

$P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ idi.

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\|^2 = (x+c)^2+y^2 \ , \ \|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = (x-c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\|^2 - \|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = 4cx$$

$$\Rightarrow \left(\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\|\right)\underbrace{\left(\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\|\right)}_{2a} = 4cx$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2\frac{c}{a}x$$

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$$

sistemi çözülürse $\|\overrightarrow{PF_1}\| = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right)$, $\|\overrightarrow{PF_2}\| = \frac{c}{a}\left(-x + \frac{a^2}{c}\right)$ bulunur.

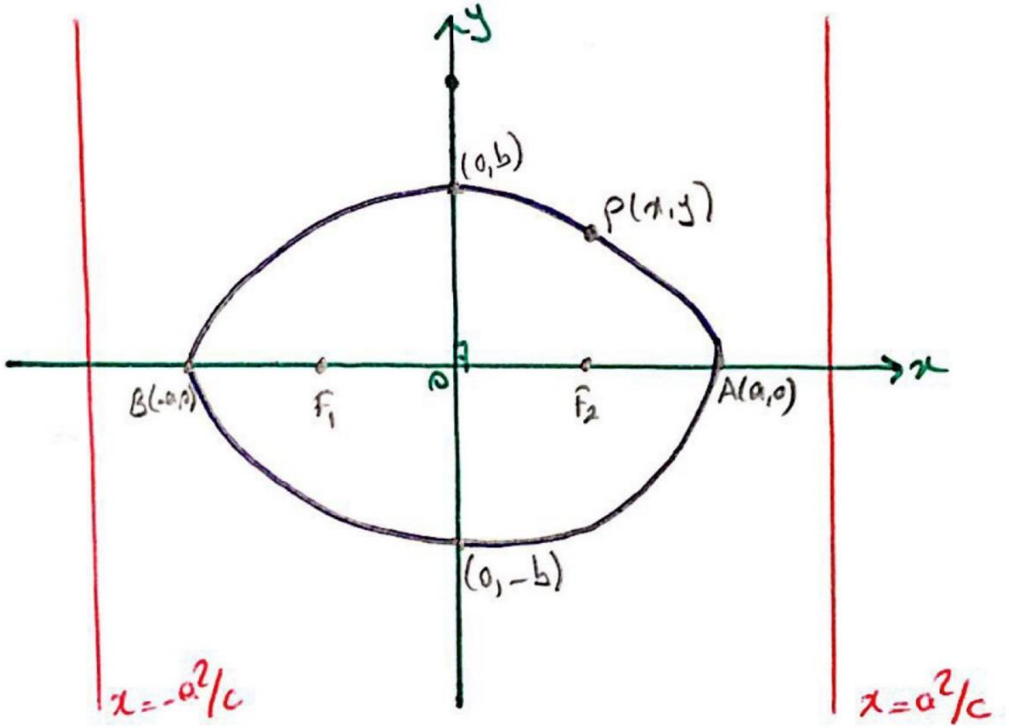
$$d_1 \dots \quad x + \frac{a^2}{c} = 0$$

ve

$$d_2 \dots \quad -x + \frac{a^2}{c} = 0 \qquad \text{doğrularını alalım.}$$

$d_1 \dots \ x + \dfrac{a^2}{c} = 0 \ , \quad d_2 \dots \ -x + \dfrac{a^2}{c} = 0$

$a > c \Rightarrow a^2 > ac \Rightarrow \dfrac{a^2}{c} > a$ dır.



$d_1 \ldots\ x+\frac{a^2}{c}=0$, $d_2 \ldots -x+\frac{a^2}{c}=0$ idi.

$P(x,y)$ nin d_1 e olan uzaklığı;

$$l_1 = \frac{|x+a^2/c|}{1}$$

$\|\overrightarrow{PF_1}\| = \frac{c}{a}(x+a^2/c)$ idi.

Şimdi, P nin F_1 e olan uzaklığının d_1 e olan uzaklığına oranını bulalım:

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_1}\|}{l_1} = \frac{\frac{c}{a}(x+a^2/c)}{|x+a^2/c|} = \frac{c}{a}$$ (uzaklıklar oranı pozitif olmalı)

Benzer şekilde; P nin d_2 ye olan uzaklığı

$$l_2 = \frac{|-x+a^2/c|}{1}$$

$\|\overrightarrow{PF_2}\| = \frac{c}{a}(-x+a^2/c)$ idi.

Şimdi, P nin F_2 ye olan uzaklığının d_2 ye olan uzaklığına oranını bulalım;

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_2}\|}{l_2} = \frac{\frac{c}{a}(-x+a^2/c)}{|-x+a^2/c|} = \frac{c}{a}$$ olur.

Sonuç: Elips üzerindeki bir $P(x,y)$ noktasının F_1 ve F_2 odaklarına olan uzaklığının, P nin d_1 ve d_2 doğrularına uzaklıkları oranı sabittir. O halde elips, sabit iki noktaya ve sabit iki doğruya uzaklıkları oranı sabit olan P noktalarının geometrik yeridir. Bu sabit iki noktaya **odaklar**, sabit iki doğruya **doğrultmanlar**, sabit $e=\frac{c}{a}$ oranına da elipsin **dış merkezliği** denir.

O halde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ elipsi için $a^2-b^2=c^2$ olmak üzere odaklar $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ dır.

F_1 e karşılık gelen doğrultman doğrusu $x=-a^2/c$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman doğrusu $x=a^2/c$,

Dış merkezlik ise $e=\frac{c}{a}$ dır. $c<a$ olduğundan elips için $e<1$ dir.

Not: $a^2=b^2+c^2$ olup $a>b$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ elipsinin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$$a^2=25\ ,\ b^2=9\ ,\ a^2-b^2=c^2 \Rightarrow c=\mp 4$$

Odaklar $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, dış merkezlik $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

F_1 e karşılık gelen doğrultman $x=-\frac{a^2}{c} \Rightarrow x=-\frac{25}{4}$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman $x=a^2/c \Rightarrow x=\frac{25}{4}$ olur.

Örnek: Bir odağı $(5,0)$, bu odağa karşılık gelen doğrultmanı $x=\frac{13}{2}$ ve dış merkezliği de $e=\frac{2}{3}$ olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$F_1(5,0)$, $d_1 \ldots\ x-\frac{13}{2}=0$, $e=\frac{2}{3}$ olur.

Elips üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y)$ olsun. P nin d_1 e olan uzaklığı l_1 olmak üzere tanımdan,

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_1}\|}{l_1}=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{13}{2}\right|}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 5x^2+9y^2-38x+56=0 \text{ bulunur.}$$

Örnek: Bir odağı $F(-2,3)$, bu odağa karşılık gelen doğrultmanı $d \ldots x+2y+4=0$ ve dış merkezliği $e=\frac{1}{2}$ olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Elips üzerinde herhangi bir nokta $P(x,y)$ olsun.

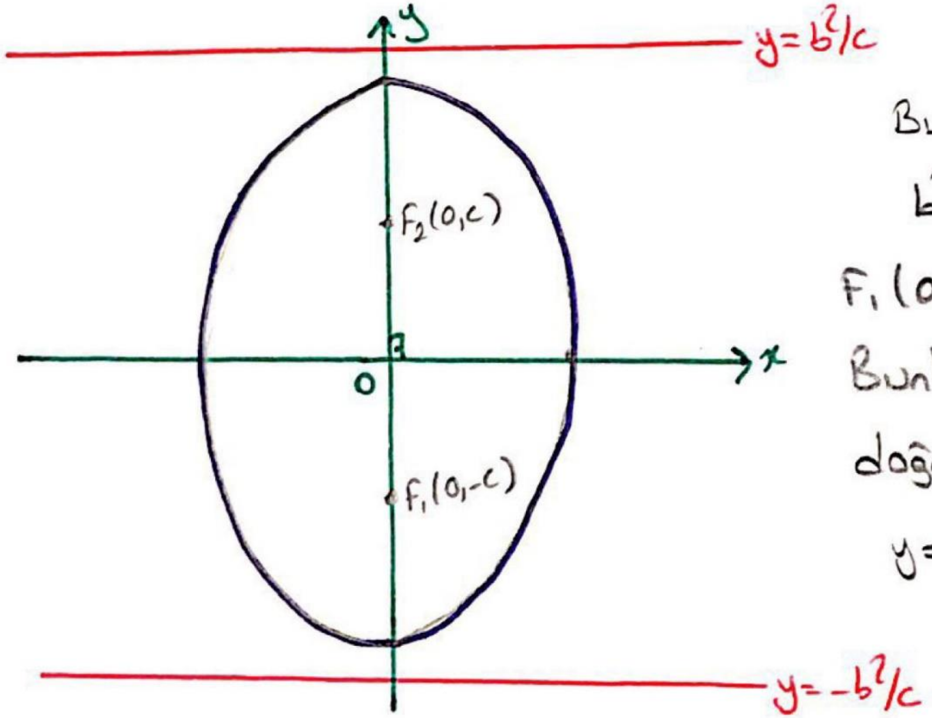
P nin d ye olan uzaklığı l olmak üzere tanımdan,

$$\frac{\|\overrightarrow{PF}\|}{l} = e = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\frac{|x+2y+4|}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 19x^2+16y^2-4xy+72x-136y+244=0 \text{ bulunur.}$$

NOT: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi için $b>a$ ise odaklar y ekseni üzerinde olur.



Bu durumda, $b^2-a^2=c^2$ olup odaklar $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ dir. Bunlara karşılık gelen doğrultmanlar ise $y=-b^2/c$ ve $y=b^2/c$ dir. Elipsin dış merkezliği $e=\frac{c}{b}<1$ olur.

* Diğer ifadede x ile y ve a ile b nin rol değiştirmiş şekli buradaki formülleri vermektedir.

Örnek: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ elipsinin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$a^2=16,\ b^2=25\ (a<b)$

$b^2-a^2=c^2 \Rightarrow c=\mp 3$ olup odaklar $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ olur.

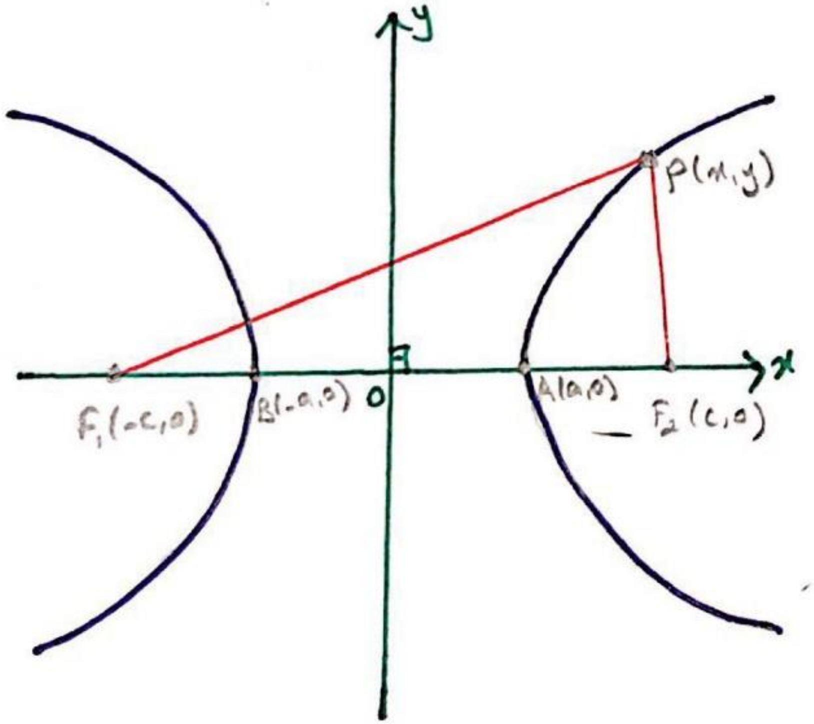
F_1 e karşılık gelen doğrultman $y=-\frac{b^2}{c} \Rightarrow y=-\frac{25}{3}$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman $y=\frac{b^2}{c} \Rightarrow y=\frac{25}{3}$

Dış merkezlik $e=\frac{c}{b}=\frac{3}{5}<1$ bulunur.

Merkezil Hiperbolde Odak ve Doğrultman

Düzlemde sabit iki noktaya uzaklıkları farkı sabit olan noktaların geometrik yerine **hiperbol**, bu sabit noktalara da hiperbolün **odakları** adı verilir. Şimdi, $F_1(-c,0)$ ve $F_2(c,0)$ olan hiperbolün denklemini bulalım:



Hiperbol üzerinde herhangi bir $P(x,y)$ noktasını alalım. Tanımdan,

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a = \text{sabit}$$

($P = A$ alınırsa

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = a + c - (c - a) = 2a)$$

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a, \quad P(x,y), \quad F_1(-c,0), \; F_2(c,0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2xc + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2xc + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2c^2 + a^4 - 2x\cancel{c}a^2 = a^2x^2 + a^2c^2 - 2\cancel{a^2}xc + a^2y^2$$

$$\Rightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$c > a$ olduğundan $c^2 > a^2$ olur $c^2 - a^2 = b^2$ alınırsa

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

Şimdi hiperbolde doğrultman kavramını ele alalım:

$P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ idi.

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\|^2 = (x+c)^2+y^2 \quad , \quad \|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = (x-c)^2+y^2$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\|^2 - \|\overrightarrow{PF_2}\|^2 = 4cx$

$\Rightarrow \underbrace{(\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\|)}_{2a}(\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\|) = 4cx$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2\frac{c}{a}x$

$\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$

sistemi çözülürse $\|\overrightarrow{PF_1}\| = \frac{c}{a}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)$, $\|\overrightarrow{PF_2}\| = \frac{c}{a}\left(-x+\frac{a^2}{c}\right)$

bulunur.

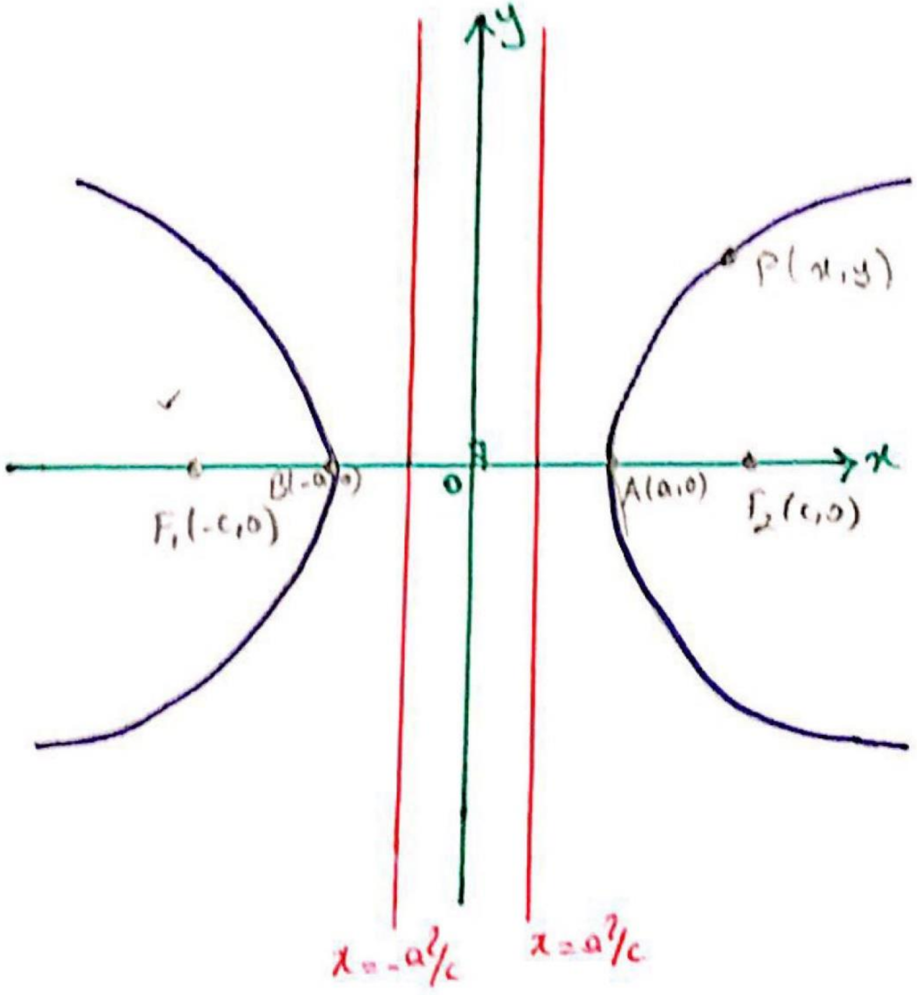
$$d_1 \ldots \quad x+\frac{a^2}{c}=0$$

ve

$$d_2 \ldots \quad -x+\frac{a^2}{c}=0$$ doğrularını alalım.

$d_1 \dots x + \frac{a^2}{c} = 0$, $d_2 \dots -x + \frac{a^2}{c} = 0$

$a < c \Rightarrow a^2 < ac \Rightarrow \frac{a^2}{c} < a$ dır.



$d_1 \ldots\ x + \frac{a^2}{c} = 0$, $d_2 \ldots\ -x + \frac{a^2}{c} = 0$ idi.

$P(x,y)$ nin d_1 e olan uzaklığı,

$$l_1 = \frac{|x + a^2/c|}{1}$$

$\|\overrightarrow{PF_1}\| = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right)$ idi.

Şimdi P nin F_1 e olan uzaklığının d_1 e olan uzaklığına oranını bulalım:

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_1}\|}{l_1} = \frac{\frac{c}{a}(x + a^2/c)}{|x + a^2/c|} = \frac{c}{a}$$ (uzaklıklar oranı pozitif olmalı)

Benzer şekilde; P nin d_2 ye olan uzaklığı $l_2 = \frac{|-x + a^2/c|}{1}$

$\|\overrightarrow{PF_2}\| = \frac{c}{a}\left(-x + \frac{a^2}{c}\right)$ idi.

Şimdi, P nin F_2 ye olan uzaklığının d_2 ye olan uzaklığına oranını bulalım:

$$\frac{\|\overrightarrow{PF_2}\|}{l_2} = \frac{\frac{c}{a}(-x + a^2/c)}{|-x + a^2/c|} = \frac{c}{a}$$ olur.

Sonuç: Hiperbol üzerindeki bir $P(x,y)$ noktasının F_1 ve F_2 odaklarına olan uzaklığının, P nin d_1 ve d_2 doğrularına uzaklıkları oranı sabittir.
O halde hiperbol, sabit iki noktaya ve sabit iki doğruya uzaklıkları oranı sabit olan P noktalarının geometrik yeridir. Bu sabit iki noktaya **odaklar**, sabit iki doğruya **doğrultmanlar**, sabit $e=\frac{c}{a}$ oranına da hiperbolün **dış merkezliği** denir. O halde,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolü için $a^2+b^2=c^2$ olmak üzere odaklar $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ dır.

F_1 e karşılık gelen doğrultman doğrusu $x=-a^2/c$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman doğrusu $x=a^2/c$,

Dış merkezlik ise $e=\frac{c}{a}$ dır. $c>a$ olduğundan hiperbol için $e>1$ dir.

Örnek: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ hiperbolünün odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

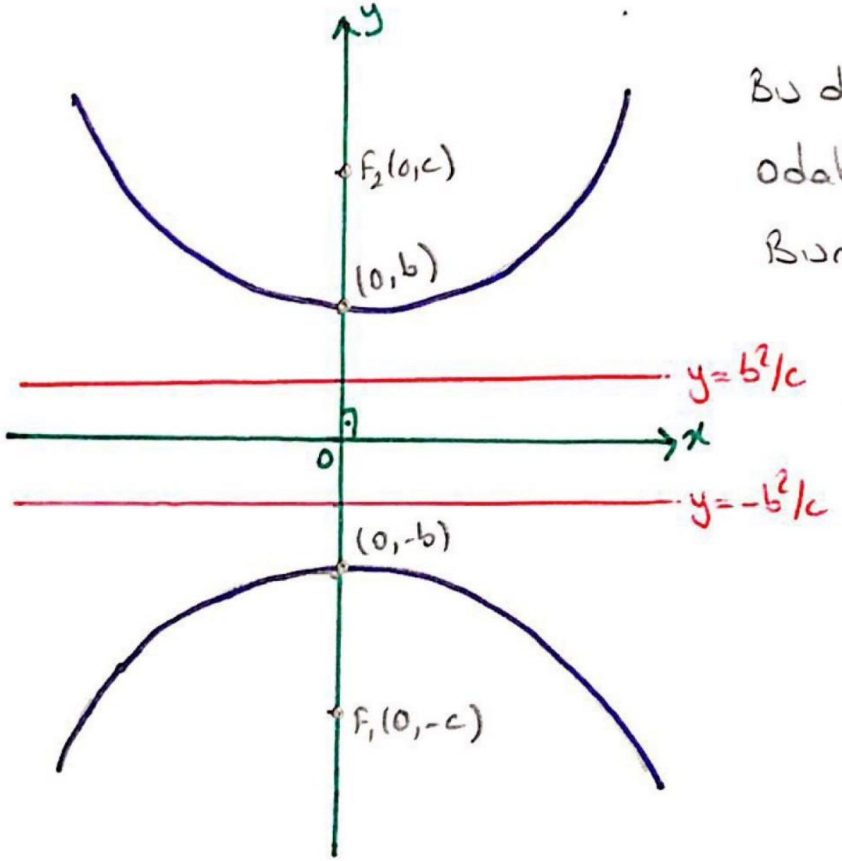
$a^2=9$, $b^2=25$, $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow c=\mp 5$

Odaklar $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$, dış merkezlik $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}>1$

F_1 e karşılık gelen doğrultman $x=-\frac{a^2}{c} \Rightarrow x=-\frac{9}{5}$

F_2 ye karşılık gelen doğrultman $x=\frac{a^2}{c} \Rightarrow x=\frac{9}{5}$ olur.

NOT: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünde odaklar y ekseni üzerindedir.

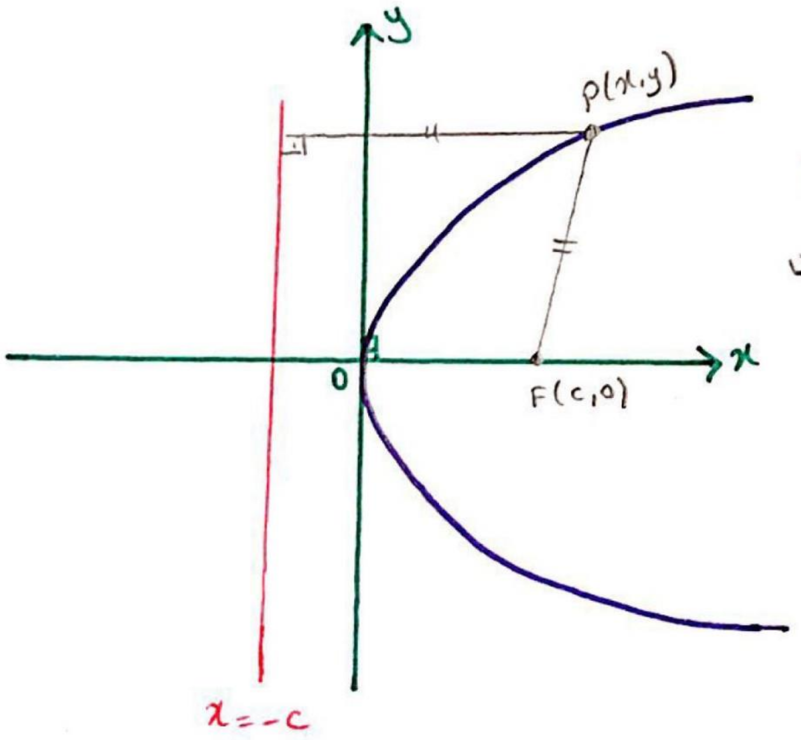


Bu durumda $b^2+a^2=c^2$ olup odaklar $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ dir. Bunlara karşılık gelen doğrultmanlar ise $y=-b^2/c$ ve $y=b^2/c$ olur. Hiperbolün dış merkezliği ise $e=\frac{c}{b}>1$ dir.

* Diğer ifadede x ile y ve a ile b nin rol değiştirmiş şekli buradaki formülleri vermektedir.

Merkezil Parabolde Odak ve Doğrultman

Sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine **parabol**, sabit noktaya parabolün **odağı**, sabit doğruya da **doğrultmanı** adı verilir.



Odağı $F(c,0)$ ve doğrultmanı $x=-c$ olan parabolün denklemini bulalım: P nin d ye olan uzaklığı $l=|x+c|$,

$$\|\vec{PF}\|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\|\vec{PF}\|=l$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=|x+c|$$

$$\Rightarrow y^2=4cx$$ bulunur.

* Parabol için dış merkezlik $e=1$ dir.

Örnek: $y^2=2x$ parabolünün odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$y^2=4cx$ ile karşılaştırılırsa $c=\frac{1}{2}$ olup $F(\frac{1}{2},0)$ olup doğrultman $x=-1/2$ olur.

Not: $x^2=by$ parabolünün odağı $F(0,\frac{b}{4})$, doğrultmanı $y=-\frac{b}{4}$ olur.

SONUÇ: Elips, hiperbol ve parabol için elde edilen sonuçlar göz önüne alınırsa, aşağıdaki ortak sonuç elde edilir:

Düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yerine konik denir. Sabit noktaya koniğin odağı, sabit doğruya doğrultmanı, sabit e oranına da dış merkezliği adı verilir.

$e<1$ ise konik elips sınıfından,

$e>1$ ise konik hiperbol sınıfından,

$e=1$ ise konik parabol sınıfındandır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 10