UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite13

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Teorem: V bir iç çarpım uzayı, $U \subset V$ sıfırı içermeyen ortogonal bir küme olsun. Bu durumda, U lineer bağımsızdır.

İspat: V bir iç çarpım uzayı olmak üzere $U \subset V$ nin ortogonal küme olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $\langle x, y \rangle = 0$ olur.

U lineer bağımsızdır: I bir indis kümesi, $c_i \in F$, $x_i \in U, i \in I$ olmak üzere

$$\sum_{i \in I} c_i x_i = 0$$

olsun. $\forall i \in I$ için $c_i = 0$ olduğunu göstereceğiz. $\forall j \in I$ için

$$0 = \langle \sum_{i \in I} c_i x_i, x_j \rangle \underset{(\text{Bilineerlik})}{=} \sum_{i \in I} c_i \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{\delta_{ij}} = c_j \underbrace{\|x_j\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow c_j = 0$$

olduğundan U lineer bağımsızdır

Gram-Schmidt Ortonormalleştirme Yöntemi

V, F cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı ve $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset V$ lineer bağımsız bir küme olsun. Bu lineer bağımsız sistemden

$$y_1 = x_1 \ , \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i \ , \quad k = 2, 3, \dots, r$$

olmak üzere $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ ortogonal kümesi elde edilir. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ortogonal kümesindeki her vektör normlanırsa, yani, $e_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$, $i = 1, 2, \dots, r$ olarak alınırsa $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ ortonormal kümesi elde edilir.

Ödev: $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ kümesinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

<u>Örnek:</u> $\{x_1=(1,-1,1),\ x_2=(2,0,-1),\ x_3=(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız kümesinden ortonormal bir küme elde ediniz.

Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi kullanılarak

$$\{x_1, x_2, x_3\} \text{ lineer bağımsız küme}$$

$$\downarrow$$

$$\{y_1, y_2, y_3\} \text{ ortogonal küme}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{e_1=\frac{y_1}{\|y_1\|},\ e_2=\frac{y_2}{\|y_2\|},\ e_3=\frac{y_3}{\|y_3\|}\right\} \text{ ortonormal küme}$$

elde edilir.

$$y_1 = x_1 = (1,-1,1)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1 = (2,0,-1) - \frac{\langle (2,0,-1),(1,-1,1)\rangle}{1^2+(-1)^2+1^2}(1,-1,1)$$

$$= (2,0,-1) - \frac{1}{3}(1,-1,1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_2\rangle}{\langle y_2, y_2\rangle} y_2 - \frac{\langle x_3, y_1\rangle}{\langle y_1, y_1\rangle} y_1$$

$$= (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0), \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)\rangle}{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$- \frac{\langle (0,1,0), (1,-1,1)\rangle}{3} (1,-1,1)$$

$$= (0,1,0) - \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{{}^{14}\frac{\cancel{42}}{\cancel{9}}} \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3}(1,-1,1)$$

$$= \left(\frac{3}{14}, \frac{9}{14}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{ y_1 = (1,-1,1),\ y_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right),\ y_3 = \left(\frac{3}{14}, \frac{9}{14}, \frac{3}{7}\right)\right\}$$

ortogonal bir kümedir (Kontrol ediniz).

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \sqrt{\frac{3}{14}}\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

$$e_3 = \frac{14}{\sqrt{126}}\left(\frac{3}{14}, \frac{9}{14}, \frac{3}{7}\right)$$

olarak alınırsa $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bir kümedir.

Uygulama

Soru: $\mathbb{R}^2$ de $U = \{x_1 = (2,1), x_2 = (-1,3)\}$ kümesinin bir baz olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: U bazdır $\Leftrightarrow$ U lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^2 = \mathrm{sp}U$

1) U lineer bağımsız mı?: $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \theta_{\mathbb{R}^2}$$

olduğunu, yani;

$c_1(2,1)+c_2(-1,3)=(0,0)$

olduğunu kabul edelim. $c_1=c_2=0$ ise U lineer bağımsız, aksi taktirde lineer bağımlıdır.

$\Rightarrow (2c_1, c_1)+(-c_2, 3c_2)=(0,0)$

$\Rightarrow (2c_1-c_2\,,\ c_1+3c_2)=(0,0)$

$$\Rightarrow 3/\ \begin{array}{r} 2c_1-c_2=0 \\ c_1+3c_2=0 \\ \hline 7c_1=0 \end{array} \Rightarrow c_1=0,\ c_2=0$$

$\Rightarrow$ U lineer bağımsızdır.

2) $\underline{\mathbb{R}^2 = spU \text{ mu?}}$ $\mathbb{R}^2=spU \Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R}^2$ vektörü x_1 ve x_2 nin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir

$\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R}^2$ vektörü için $c_1x_1+c_2x_2=y$ olacak şekilde $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bulunabilir.

$\forall y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ alalım. $c_1x_1+c_2x_2=y$ olacak şekilde $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ bulmalıyız.

$$\Rightarrow c_1(2,1)+c_2(-1,3)=(y_1,y_2)$$

$$\Rightarrow (2c_1-c_2,\, c_1+3c_2)=(y_1,y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3/\ 2c_1-c_2=y_1 \\ \quad\ \ c_1+3c_2=y_2 \\ \hline \quad 7c_1=3y_1+y_2 \end{array} \Rightarrow c_1=\frac{3y_1+y_2}{7}$$

$$c_1+3c_2=y_2\Rightarrow c_2=\frac{1}{3}(y_2-c_1)=\frac{1}{3}\left(y_2-\frac{3y_1+y_2}{7}\right)$$

$$=\frac{2y_2-y_1}{7}$$

O halde, $\forall y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ vektörü için

$$y = \frac{3y_1+y_2}{7}x_1 + \frac{2y_2-y_1}{7}x_2$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle $\mathbb{R}^2 = sp\,U$ dur. Yani, U kümesi $\mathbb{R}^2$ yi gerer.

$\therefore$ $U = \{x_1 = (2,1),\ x_2 = (-1,3)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir bazıdır.

Soru: Aşağıdaki vektör uzaylarının boyutlarını bulunuz.

a) $U_1 = sp\{(2,3,1),(0,0,0)\}$

b) $U_2 = sp\{(-1,5,1),(-2,10,-2)\}$

c) $U_3 = sp\{(-3,3,4),(9,-9,-12)\}$

Çözüm: Bir vektör uzayının herhangi bir bazındaki vektör sayısına boyut denildiğini biliyoruz.

$$sp\{x_1,x_2,\dots,x_n\} = \{c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n \mid c_i \in F,\ i=1,2,\dots,n\}$$

a) $0.(2,3,1)=(0,0,0)$ olduğundan $U_1 = sp\{(2,3,1)\}$ yazılabilir.
$\{(2,3,1)\}$ lineer bağımsız olup U_1 için bazdır.

$\Rightarrow$ boy $U_1 = 1$

b) $\{(-1,5,1),(-2,10,-2)\}$ lineer bağımsızdır. Çünkü

$$c_1(-1,5,1)+c_2(-2,10,-2) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow (-c_1-2c_2, 5c_1+10c_2, c_1-2c_2) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c_1-2c_2=0 \\ 5c_1+10c_2=0 \\ c_1-2c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -c_1-2c_2=0 \\ + \quad c_1-2c_2=0 \\ \hline c_2=0, c_1=0 \end{array}$$

$\Rightarrow \{(-1,5,1),(-2,10,-2)\}$ lineer bağımsızdır

$\Rightarrow$ boy $U_2 = 2$

c) $(9,-9,-12)=-3(-3,3,4) \Rightarrow U_3=sp\{(-3,3,4)\}$ veya

$U_3=sp\{(9,-9,-12)\}$

$\Rightarrow$ boy $U_3=1$

Soru: $U=\{(1,-2,4),(0,1,2),(0,0,-3)\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz. $\mathbb{R}^3=spU$ mudur? U, $\mathbb{R}^3$ ün bazı mıdır?

Çözüm: $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$c_1(1,-2,4)+c_2(0,1,2)+c_3(0,0,-3)=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$$

$\Rightarrow (c_1,-2c_1+c_2,4c_1+2c_2-3c_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow c_1=0,\ -2c_1+c_2=0,\ 4c_1+2c_2-3c_3=0$

$\Rightarrow c_1=0, c_2=0, c_3=0 \Rightarrow U$ lineer bağımsız.

boy$\mathbb{R}^3=3$ olduğunu biliyoruz. $U\subset\mathbb{R}^3$ lineer bağımsit kümesinde 3 vektör olduğundan U, $\mathbb{R}^3$ ü gerer yani, $\mathbb{R}^3 = sp\,U$ dur. Ayrıca, U; $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır.

Soru: ϕ, $\{(1,-1,-2)\}$, $\{(-1,1,3),(2,-2,1)\}$ kümeleri veriliyor. Bu kümeler $\mathbb{R}^3$ ü gerer mi? Araştırınız.

Çözüm: $boy\,\mathbb{R}^3 = 3$ olduğunu biliyoruz. $U \subset \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3 = sp\,U \Rightarrow$ U nun eleman sayısı en az 3 olmalıdır. Diğer bir ifadeyle, eleman sayısı 3 ten az olan bir alt küme $\mathbb{R}^3$ ü geremez. (Eleman sayısının 3 olması germe için yeterli bir şart değil fakat gereklidir). Verilen kümelerin eleman sayıları 3 ten az olduğundan $\mathbb{R}^3$ ü hiç biri germez.

Lineer Dönüşümler

<u>Tanım:</u> U ve V aynı F cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $L: U \to V$ fonksiyonu

1) $L(x+y) = L(x) + L(y)$, $\forall x, y \in U$

2) $L(cx) = cL(x)$, $\forall c \in F$, $\forall x \in U$

özelliklerini sağlayırsa L ye lineer dönüşüm denir.

<u>Not:</u> 1 ve 2 özellikleri birleştirilirse $\forall x, y \in U$, $\forall c \in F$ için $L(cx+y) = cL(x) + L(y)$ oluyorsa L ye lineer dönüşüm denir.

<u>Tanım:</u> $L: U \to V$ bir lineer dönüşüm olsun.

1) $V = U \Rightarrow$ L lineer dönüşümüne endomorfizm denir.

2) $L: U \to V$ lineer dönüşümü örten ise L ye lineer epimorfizm denir.

3) $L: U \to V$ lineer dönüşümü 1-1 ve örten ise L ye lineer izomorfizm denir.

4) $L: V \to V$ lineer dönüşümü 1-1 ve örten ise L ye lineer otomorfizm denir.

<u>Örnek:</u> U, V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} L: U &\longrightarrow V \\ x &\longrightarrow L(x) = 0_V \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir lineer dönüşümdür.

<u>Örnek:</u> V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} L: V &\longrightarrow V \\ x &\longrightarrow L(x) = x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir lineer dönüşümdür. Bu lineer dönüşüme özdeşlik veya birim dönüşüm denir.

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2)$$

fonksiyonu veriliyor. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ alalım.

$$L(cx + y) = L(c(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3))$$

$$= L(cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, cx_3 + y_3)$$

$$= (cx_1 + y_1 + 2(cx_3 + y_3), cx_1 + y_1 + cx_2 + y_2)$$

$$cL(x) + L(y) = c(x_1 + 2x_3, x_1 + x_2) + (y_1 + 2y_3, y_1 + y_2)$$

$$= (cx_1 + 2cx_3 + y_1 + 2y_3, cx_1 + cx_2 + y_1 + y_2)$$

$\Rightarrow L(cx + y) = cL(x) + L(y)$ olup L bir lineer dönüşümdür.

Örnek: F bir cisim olmak üzere F^n in F cismi üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$L_i : F^n \longrightarrow F$
$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow L_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$
fonksiyonuna koordinat fonksiyonu denir. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için L_i koordinat fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olduğunu gösterelim.

$i = 1, 2, \dots, n$ sabit olsun. $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F^n$ ve $\forall c \in F$ alalım.

$$L_i(cx + y) = L_i(c(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n))$$
$$= L_i(cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n)$$
$$= cx_i + y_i$$

$cL_i(x)+L(y)=cx_i+y_i$

$\Rightarrow L_i(cx+y)=cL_i(x)+L_i(y)$ olup $L_i : F^n \to F$ koordinat fonksiyonu bir lineer dönüşümdür.

<u>Teorem:</u> $L: U \to V$ lineer dönüşüm olsun.

1) $L(0_u)=0_v$

2) $L(-x)=-L(x)$, $\forall x \in U$

3) $L(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n)=\sum_{i=1}^{n} c_iL(x_i)$, $c_i \in F$, $x_i \in U$, $i=1,2,\dots,n$

<u>İspat:</u>

1) $L(0_u)=L(0_u+0_u)=L(0_u)+L(0_u) \Rightarrow L(0_u)=0_v$

2) $L(-x)=L(-1x)=-1L(x)=-L(x)$

3) $L(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n)=L(c_1x_1)+L(c_2x_2)+\dots+L(c_nx_n)$

$=c_1L(x_1)+c_2L(x_2)+\dots+c_nL(x_n)$

Örnek: $L(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$ olarak tanımlanan $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu veriliyor.

$L(1,1) = (1,1)$ ve $L(-1,-1) = (1,-1)$ dir. L bir lineer dönüşüm ise $L(-1,-1) = -L(1,1)$ olur. Fakat

$$L(-1,-1) = (1,-1) \neq -(1,1) = -L(1,1)$$

olduğundan L bir lineer dönüşüm değildir.

Örnek: $L(1,0) = (1,1,-2)$ ve $L(0,1) = (-2,0,-3)$ olacak şekilde bir $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü var mıdır? Var ise bu lineer dönüşümü bulunuz.

$Sp\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$ dir. $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$ olarak yazılırsa

$$L(x_1,x_2)=L(x_1(1,0)+x_2(0,1))=x_1L(1,0)+x_2L(0,1)$$
$$=x_1(1,1,-2)+x_2(-2,0,-3)$$
$$=(x_1-2x_2,\ x_1,-2x_1-3x_2)$$

L lineer mi? $\forall x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $\forall c\in\mathbb{R}$ alalım.

$$L(cx+y)=L(cx_1+y_1,cx_2+y_2)=(cx_1+y_1-2cx_2-2y_2,$$
$$cx_1+y_1,-2cx_1-y_1-3cx_2-3y_2)$$

$$cL(x)+L(y)=c(x_1-2x_2,x_1,-2x_1-3x_2)+(y_1-2y_2,y_1,-2y_1-3y_2)$$
$$=(cx_1-2cx_2+y_1-2y_2,cx_1+y_1,-2cx_1-3cx_2-2y_1-3y_2)$$

$\Rightarrow L(cx+y)=cL(x)+L(y)$ olup $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ fonksiyonu lineer dönüşümdür.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite13

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"