ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite12

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Lineer Bağımsızlık

Tanım: V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ olsun. $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ olmak üzere $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0_V$ iken $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ oluyorsa $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vektör kümesine lineer bağımsızdır, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ te $\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ vektör kümesi lineer bağımsızdır, gösterelim.

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ için $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ olsun. $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olduğunu gösterirsek verilen vektör kümesi lineer bağımsız olur.

$$\Rightarrow (c_1, 0, 0) + (0, c_2, 0) + (0, 0, c_3) = (0,0,0)$$

$(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0) \Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$

$\therefore \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız vektör kümesidir.

<u>Örnek:</u> $\mathbb{R}^3$ de $\{x_1 = (1,1,2), x_2 = (0,1,-1), x_3 = (2,1,5)\}$ vektör kümesi için $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = -1$ alınırsa

$$2x_1 - x_2 - x_3 = (0,0,0)$$

olur. O halde, bu vektör kümesi lineer bağımlıdır.

<u>Örnek:</u> V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı ise $x \neq 0_V$ olan $\forall x \in V$ vektörü için $\{x\}$ lineer bağımsızdır. Çünkü, $c \in F$ için

$$cx = 0_V \Rightarrow x \neq 0_V \text{ olduğundan } c = 0$$

dır.

Örnek: V bir vektör uzayı olmak üzere $\{0_V\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Çünkü, $c \in F$ için

$$c \cdot 0_V = 0_V \Rightarrow c = 0$$ diyemeyiz. Veya,

$c \neq 0$ için $c \cdot 0_V = 0_V$ olup $\{0_V\}$ lineer bağımlıdır.

Not: Bu örneğe göre, sıfır vektörünü içeren her küme lineer bağımlıdır.

Teorem: V bir vektör uzayı ve $U_1 \subset U_2$ olmak üzere $U_1, U_2 \subset V$ olsun.

1) U_2 lineer bağımsız ise U_1 de lineer bağımsızdır,

2) U_1 lineer bağımlı ise U_2 de lineer bağımlıdır.

İspat: $U_1 \subset U_2$ ve $U_1, U_2 \subset V$ olsun.

1) U_2 nin lineer bağımsız olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, $c_i \in F$, $x_i \in U_2$ olmak üzere

$\sum c_i x_i = 0_V$ iken $c_i = 0$ olur.

$b_i \in F$, $y_i \in U_1$ olmak üzere $\sum b_i y_i = 0_V$ olduğunu kabul edelim. $U_1 \subset U_2$ olduğundan $\forall y_i \in U_1$ için $y_i \in U_2$ olur. U_2 lineer bağımsız olduğundan

$$\sum b_i y_i = 0_V \Rightarrow b_i = 0$$

olur. Bu ise U_1 in lineer bağımsız olması demektir.

2) U_1 in lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $c_i \in F$, $x_i \in U_1$ olmak üzere sıfırdan farklı bazı $c_i \in F$ ler için

$$\sum c_i x_i = 0_V$$

olur. $U_1 \subset U_2$ olduğundan son eşitlikteki vektörler U_2 ye de aittir. Dolayısıyla, U_2 de lineer bağımlıdır.

<u>Teorem:</u> V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ olsun. U lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow$ En az bir $x_i \in U$ vektörü diğerleri cinsinden yazılabilir.

<u>İspat:</u> $(\Rightarrow)$ U nun lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, hepsi sıfır olmayan, $c_i \in F$ için

$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0_V$ olur. $c_1 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $c_1^{-1} \in F$ vardır ve

$$c_1 x_1 = -c_2 x_2 - c_3 x_3 - \cdots - c_n x_n \quad \text{i soldan } c^{-1} \text{ ile işlersek}$$

$$\Rightarrow x_1 = -c_1^{-1} c_2 x_2 - c_1^{-1} c_3 x_3 - \cdots - c_1^{-1} c_n x_n$$

$(\Leftarrow)$ $\exists x_i \in U$ nun diğerleri cinsinden yazıldığını kabul edelim

$$x_i = x_1 \Rightarrow x_1 = c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n, \quad c_i \in F, \ i = 2, 3, \ldots, n$$

$$\Rightarrow x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3 - \cdots - c_n x_n = 0_V$$

$\Rightarrow U$ lineer bağımlıdır.

Not: $x_1, x_2 \in V$ olsun. $\{x_1, x_2\}$ lineer bağımlıdır

$\iff x_1 = c x_2, \ c \in F, \ c \neq 0$

Önerme: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ olsun. Eğer $x_j \in V$ için $c_j \neq 0$ olmak üzere $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0_V$ olacak şekilde $c_i \in F, \ i = 1, 2, \dots, n$ varsa

$$sp\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = sp\{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$$

dir. Diğer bir ifadeyle, x_j diğer vektörler cinsinden yazılabiliyorsa x_j atıldığında $sp\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ değişmez.

İspat: $x_j = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{j-1} x_{j-1} + a_{j+1} x_{j+1} + \dots + a_n x_n = x$

$a_i \in F, \ i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ olsun. $\forall v \in sp\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ için

$v = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \in sp\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dir.

$\Rightarrow v = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{j-1} x_{j-1} + c_j x + c_{j+1} x_{j+1} + \dots + c_n x_n$

$\Rightarrow v \in sp\{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$

Tanım: V vektör uzayı, $U \subset V$ olsun.

1) U lineer bağımsızdır (Lineer bağımsızlık)

2) $V = sp\,U$ (Germe akışımı)

özellikleri sağlanıyorsa U ya V nin bir bazı veya tabanı denir.

Not: $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$, V nin bir bazı ise

1) U lineer bağımsızdır, yani $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 \Rightarrow c_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$

2) $V = sp\,U$, yani $\forall x \in V$ vektörü $c_i \in F$ olmak üzere

$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ şeklinde yazılabilir.

Örnek: $U = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır.

U nun lineer bağımsız olduğunu göstermiştik.

Şimdi de, U nun $\mathbb{R}^3$ ü gerdiğini gösterelim.

$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ alalım. x in e_1, e_2, e_3 cinsinden yazılabileceğini göstermeliyiz.

$$x=(x_1,x_2,x_3)=(x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3)$$
$$=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$$
$$=\underbrace{x_1}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{e_1}_{\in U}+\underbrace{x_2}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{e_2}_{\in U}+\underbrace{x_3}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{e_3}_{\in U}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3=\mathrm{sp}\,U$ olup germe aksiyomu sağlanır.

$\therefore U=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır. Bu baza $\mathbb{R}^3$ ün standart bazı denir.

Tanım: V vektör uzayının herhangi bir bazındaki vektör sayısına V nin boyutu denir ve $\mathrm{boy}\,V$ ile gösterilir.

Örnek: $U=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı idi.

$$\Rightarrow \text{boy}\, \mathbb{R}^3 = 3$$

Örnek: $U=\{e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,0,\dots,0), \dots, e_n=(0,\dots,0,1)\} \subset \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$ in bir bazı olup $\text{boy}\, \mathbb{R}^n = n$ dir.

Örnek: Sadece sıfır vektöründen oluşan uzayın boyutu sıfırdır. Çünkü, bu uzayda lineer bağımsız bir alt küme yoktur.

Örnek: V bir vektör uzayı, $x \neq 0_V$ olmak üzere $x \in V$ olsun. $U = sp\{x\} \subset V$; V nin bir alt vektör uzayı olup $\text{boy}\, U = 1$ dir. Çünkü, $U = sp\{x\}$ tanımından germe aksiyomunu sağlar. Ayrıca, $\{x\}$ lineer bağımsız bir kümedir. Yani, $\{x\}$, U nun bir bazıdır.

Önerme: V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $U=\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ olsun. U; V nin bazıdır $\Leftrightarrow$ $\forall x \in V$ için $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, $c_i \in F$, $i=1,2,\dots,n$ yazılışı tek türlüdür.

İspat: ($\Rightarrow$) U; V nin bazı olsun. $\forall x \in V$ alalım.

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \quad , \; c_i, d_i \in F, i=1,2,\dots,n$$

şeklinde iki türlü yazılsın.

$\Rightarrow (c_1-d_1)x_1 + (c_2-d_2)x_2 + \dots + (c_n-d_n)x_n = 0_V$

$\Rightarrow U$ lineer bağımsız olup $c_i - d_i = 0$, $i=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow c_i = d_i$, $i=1,2,\dots,n \Rightarrow$ Yazılış tek türlüdür.

($\Leftarrow$) $\forall x \in V$ için $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ yazılışı tek türlü olsun. $d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n = 0_V$ olsun. Diğer yandan $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0_V$ olup yazılış tek türlü olduğundan $d_i = 0$, $i=1,2,\dots,n$ olup

U lineer bağımsızdır. Ayrıca, kabulden dolayı $V = sp\,U$ yazılabilir. O halde, U; V nin bir bazıdır.

Tanım: V bir vektör uzayı, $U \subset V$ olsun

1) U lineer bağımsız ve V nin U yu kapsayan lineer bağımsız alt kümesi yoksa U ya maksimal lineer bağımsız küme

2) $V = sp\,U$ ve U nun hiç bir öz alt kümesi V yi germiyorsa U ya minimal geren küme denir.

Teorem: V bir vektör uzayı, $U \subset V$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

1) U maksimal lineer bağımsız kümedir,
2) U minimal geren kümedir,
3) U; V nin bir bazıdır.

İspat: (1⇒3) U maksimal lineer bağımsız küme olsun. U nun V yi gerdiğini gösterirsek V nin bir bazı olur. $\forall x \in V$ alalım. $x \notin U$ ise $U \cup \{x\}$ kabul- den lineer bağımlı olur. O halde, x diğer vektör- lerin yani U daki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani, $x \in spU$ dur. U lineer bağım- sız ve V yi gerer. O halde, U; V nin bir bazıdır.

(3⇒1) U; V nin bir bazı olsun. Bu durumda, U lineer bağımsızdır. U yu kapsayan U' gibi lineer bağımsız bir küme olduğunu kabul edelim. $\forall x \in U' - U$ ala- lım. Bu durumda, $x \in V = spU$ olur. Bu ise U' nün lineer bağımsız olması ile çelişir. O halde, böyle bir U' kümesi yoktur. Yani, U maksimal lineer bağımsız küme dir.

$(2 \Rightarrow 3)$ U minimal geren küme olsun. U nun baz olduğunu göstermek için lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. U lineer bağımsız olmasın. Bu durumda, $\exists x \in U$ vektörü diğer vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. O halde, $sp\,U = sp(U - \{x\})$ olur. Bu ise U nun minimal geren küme olması ile çelişir. O halde, U lineer bağımsız olup V nin bir bazıdır.

$(3 \Rightarrow 2)$ U; V nin bir bazı olsun. Bu durumda, $V = sp\,U$ dur. $sp\,U' = V$ olacak şekilde $U' \subset U$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \in U - U'$ için $x \in V = sp\,U'$ olur. Yani, $x \in U$, $U' \subset U$ daki baz vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Bu ise U nun lineer bağımsız olması ile çelişir. O halde, bu şekilde bir U' mevcut değildir ve böylece U minimal geren kümedir.

Teorem: $V = sp\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olsun. $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset V$ lineer bağımsız ise $m \leq n$ dir.

İspat: $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset V$ lineer bağımsız olsun.

$$V = sp\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = sp\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

yazılabilir. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1\}$ lineer bağımlıdır. Bu durumda $y_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ olacak şekilde hepsi aynı anda sıfır olmayan $c_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vardır ($\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ lineer bağımsız $\Rightarrow y_i \neq 0_V$, $i = 1, 2, \ldots, m$). Genellikten bir şey kaybetmeksizin $c_1 \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow c_1x_1 = y_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - \cdots - c_nx_n$$

$$\Rightarrow x_1 = c_1^{-1}y_1 - c_1^{-1}c_2x_2 - c_1^{-1}c_3x_3 - \cdots - c_1^{-1}c_nx_n$$

$$\Rightarrow x_1 \in sp\{y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

$$\Rightarrow V = sp\{y_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Şimdi de $\{x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2\}$ yi ele alalım.

$y_2 = d_2 x_2 + d_3 x_3 + \cdots + d_n x_n + d_{n+1} y_1$ olacak şekilde hepsi aynı anda 0 olmayan $d_i \in F$ vardır. Genellikten birşey kaybetmeksizin $d_2 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_2 = d_2^{-1} y_2 - d_2^{-1} d_{n+1} y_1 - d_2^{-1} d_3 x_3 - d_2^{-1} d_4 x_4 - \cdots - d_2^{-1} d_n x_n$$

olur. Bu ise $x_2 \in sp\{y_1, y_2, x_3, x_4, \ldots, x_n\}$ demektir.

Bu şekilde y_i lerin hepsi görünene kadar devam edilirse bunun sadece $m \leq n$ olması ile mümkün olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım: Sonlu baza sahip vektör uzayına sonlu boyutlu vektör uzayı denir.

<u>Önerme:</u> V sonlu boyutlu vektör uzayı ise tüm bazlarında aynı sayıda eleman vardır.

<u>İspat:</u> V sonlu boyutlu vektör uzayı, B ve B' ise V nin bazı olsun.

$$V = sp\,B, \quad B' \text{ lineer bağımsız} \Rightarrow |B'| \leq |B|$$

$$V = sp\,B', \quad B \text{ lineer bağımsız} \Rightarrow |B| \leq |B'|$$

$$\therefore |B| = |B'|$$

<u>Önerme:</u> V n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bu durumda

1) V nin eleman sayısı n den fazla olan hiçbir alt kümesi lineer bağımsız olamaz,

2) V nin eleman sayısı n den az olan hiçbir alt kümesi V yi geremez.

Önerme: V bir vektör uzayı olmak üzere $U, U' \subset V$ olsun.

1) U lineer bağımsızdır,
2) $V = sp\, U'$
3) $U \subset U'$

özellikleri aynı anda sağlanıyorsa V nin $U \subset B \subset U'$ olacak şekilde en az bir B bazı vardır.

İspat: $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $U' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ olsun. Eğer U' lineer bağımsız ise V nin bazı olur. Eğer U' lineer bağımlı ise $\exists\, j = 1, 2, \ldots, m$ için y_j diğer vektörlerin bir lineer birleşimidir. Bu durumda

$V = sp\{U' - \{y_j\}\}$ olur. Eğer $U' - \{y_j\}$ lineer bağımsız ise $B = U' - \{y_j\}$ alınabilir. Aksi taktirde, başka bir $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$ için $V = sp\{U' - \{y_j, y_k\}\}$ olur.

Bu şekilde devam edilerek $U \subset B \subset U'$ olacak şekilde lineer bağımsız B kümesi bulunabilir ve B; V nin bazıdır.

Teorem: V, n boyutlu vektör uzayı, $U \subset V$ ise n elemanlı bir alt küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir.

1) U lineer bağımsızdır,
2) $V = sp U$,
3) U; V nin bazıdır.

İspat: $(1 \Rightarrow 3)$ U nun lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. $boy V = n$ olduğundan V nin n den fazla elemana sahip hiç bir alt kümesi lineer bağımsız olamaz. Bu durumda, U maksimal lineer bağımsız kümedir. O halde, U; V nin bazıdır.

$(3 \Rightarrow 1)$ ✓

$(2 \Rightarrow 3)$ $V = spU$ olsun. boy $V = n$ olduğundan V nin n den az elemana sahip hiç bir alt kümesi V yi geremez. Yani, U minimal geren kümedir. Böylece U; V nin bazıdır.

$(3 \Rightarrow 2)$ ✓

<u>Teorem:</u> V sonlu boyut vektör uzayı ise aşağıdaki özellikler vardır.

1) Lineer bağımsız her alt küme V nin bir bazına tamamlanabilir,

2) V yi geren her alt kümeden V nin bir bazı elde edilebilir,

3) V nin bir bazı vardır.

İspat: Sonlu boyutlu bir V vektör uzayında her lineer bağımsız küme sonludur ve her geren küme sonlu bir alt kümeye sahiptir.

1) $U \subset V$ lineer bağımsız olsun. Bu durumda, U sonludur. $T \subset V$ sonlu olmak üzere $U' = U \cup T$ yi ele alalım. Önceki bir önermeden dolayı $U \subset B \subset U'$ olacak şekilde bir B bazı vardır.

2) $V = sp\,U$ olsun. Bu durumda, U sonludur. $T = \emptyset$ (lineer bağımsız) olarak alırsak yine önceki bir önermeden $\emptyset \subset B \subset U$ olacak şekilde bir B bazı vardır.

3) Baz tanımından açıktır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite12

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"