ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite11

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Ortonormal Vektör Sistemleri

Tanım: Üzerinde iç çarpım tanımlı olan reel veya karmaşık vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

Örnek: $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı standart iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım: V bir iç çarpım uzayı olmak üzere $U \subset V$ olsun.

i) $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $\langle x, y \rangle = 0$ ise U ya ortogonal küme denir.

ii) U birim vektörlerden oluşan ortogonal küme ise U ya ortonormal küme denir.

"ortonormal = ortogonal + her vektör birim"

Not: $x \neq 0$ olan $\forall x \in V$ vektörü için $\dfrac{x}{\|x\|}$ birim vektördür. Dolayısıyla, ortogonal bir kümedeki sıfırdan farklı her vektör normalanarak birim vektör haline getirilirse ortonormal küme elde edilir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ standart iç çarpım uzayında

$$U_1 = \{(1,1,1), (-2,1,1), (0,-1,1)\}, \quad U_2 = \{(3, \tfrac{1}{2}, -1), (-1,2,-2)\}$$

kümeleri ortogonal kümedir. U_1 in ortogonal küme olduğunu gösterelim:

$$\left.\begin{aligned}
&\langle (1,1,1), (-2,1,1) \rangle = 1.(-2) + 1.1 + 1.1 = 0 \\
&\langle (1,1,1), (0,-1,1) \rangle = 1.0 + 1.(-1) + 1.1 = 0 \\
&\langle (-2,1,1), (0,-1,1) \rangle = -2.0 + 1.(-1) + 1.1 = 0
\end{aligned}\right\} \text{ } U_1 \text{ ortogonal kümedir.}$$

Ödev olarak U_2 nin ortogonal küme olduğunu gösteriniz.

U_1 in ortogonal küme olduğunu gösterdik. U_1 deki sıfırdan farklı vektörleri normlarına bölersek ortonormal küme elde ederiz.

$\|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ $\qquad \|(0,-1,1)\| = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\|(-2,1,1)\| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow U_3 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

kümesi U_1 ortogonal kümesinden elde edilen ortonormal kümedir.

Ödev olarak U_2 ortogonal kümesinden ortonormal küme elde ediniz.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ standart iç çarpım uzayında

$U=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ kümesi ortonormal kümedir.

$\langle e_1, e_2\rangle=0,\ \langle e_1, e_3\rangle=0,\ \langle e_2, e_3\rangle=0 \Rightarrow U$ ortogonal küme

$\langle e_1, e_1\rangle=1,\ \langle e_2, e_2\rangle=1,\ \langle e_3, e_3\rangle=1 \Rightarrow U$ birim vektörlerden oluşan ortogonal küme olup ortonormal kümedir.

Tanım: $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona kronecker deltası denir.

Not: V bir iç çarpım uzayı, $U=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}\subset V$ olsun.

U ortonormal kümedir $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$; $i,j=1,2,\dots,n$

yazılabilir.

<u>Örnek:</u> $\mathbb{R}^2$ standart iç çarpım uzayında

$U=\{(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi veriliyor.

U nun ortonormal bir sistem olduğunu

gösterelim:

$e_1=(\cos t, \sin t)$, $e_2=(-\sin t, \cos t)$ olsun.

U ortonormal kümedir $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$; $i,j=1,2$

$$\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle (\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle = \cos t(-\sin t) + \sin t \cos t$$
$$= 0$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle (\cos t, \sin t), (\cos t, \sin t) \rangle = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$\langle e_2, e_2 \rangle = \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\therefore$ U ortonormal kümedir.

Uygulama

Soru: V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $x_1, x_2, x_3, y \in V$ olsun. $y \in sp\{x_1, x_2, x_3\}$ ve $y \notin \{x_1, x_2\}$ ise $x_3 \in sp\{x_1, x_2, y\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $sp\{x_1, x_2, x_3\}$: x_1, x_2, x_3 vektörlerinin tüm lineer birleşimlerinin kümesi ($a_1, a_2, a_3 \in F$ olmak üzere $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ şeklindeki vektörlerden oluşuyor).

$y \in sp\{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3 \in F$ vardır.

2) $y \notin sp\{x_1, x_2\} \Rightarrow y \neq b_1 x_1 + b_2 x_2$, $\forall b_1, b_2 \in F$.

1 ve 2 yi birleştirirsek $a_3 \neq 0$ dır diyebiliriz. Aksi halde, yani $a_3 = 0$ ise $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ olup $y \in sp\{x_1, x_2\}$ elde edilir ki bu ise $y \notin sp\{x_1, x_2\}$ olması ile çelişir. O halde,

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad \text{ve} \quad a_3 \neq 0$$

dır.

$$\Longrightarrow \quad a_3 x_3 = y - a_1 x_1 - a_2 x_2$$

$a_3 \neq 0$, $a_3 \in F$, F cisim $\Longrightarrow$ $a_3^{-1} \in F$ vardır.

$$\Longrightarrow \quad (a_3^{-1}) a_3 x_3 = a_3^{-1}(y - a_1 x_1 - a_2 x_2)$$

$$\Longrightarrow \quad x_3 = \underbrace{a_3^{-1}}_{\in F} y \underbrace{- a_3^{-1} a_1}_{\in F} x_1 \underbrace{- a_3^{-1} a_2}_{\in F} x_2$$

$\Rightarrow -a_3^{-1}a_1 = b_1$, $-a_3^{-1}a_2 = b_2$, $a_3^{-1} = b_3$ dersek

$x_3 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3y$ olur. Bu ise

$x_3 \in sp\{x_1, x_2, y\}$ olması demektir.

Soru: V bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\forall x, y \in V$ için

a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

b) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \underset{\text{(Norm tanımı)}}{=} \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$

(iç çarpım bilineer) $= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$+ \langle x,x\rangle - \cancel{\langle x,y\rangle} - \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$= 2(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

b) $(\Rightarrow)$ $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ olsun. $\langle x,y\rangle = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$\Rightarrow \cancel{\langle x,x\rangle} + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \cancel{\langle y,y\rangle}$$
$$= \cancel{\langle x,x\rangle} + \cancel{\langle y,y\rangle}$$

İç çarpım simetrik olup $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ dır.

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{\langle x,y\rangle} = 0 \Rightarrow 2\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0.$$

($\Leftarrow$) $\langle x,y\rangle = 0$ olsun. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ olduğunu gösterelim.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Soru: $x,y,z \in \mathbb{R}$ vektörleri için $\langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle = \langle y,z\rangle$ ve $\langle x,x\rangle = \langle y,y\rangle = \langle z,z\rangle$ olsun. Bu durumda, $x-y$, $y-z$ ve $z-x$ vektörleri arasındaki açının $\frac{2\pi}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x-y$ ile $y-z$ arasındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{\langle x-y, y-z\rangle}{\|x-y\|\,\|y-z\|} \qquad \left(\measuredangle(x,y) = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$$

eşitliği vardır.

$$\langle x-y, y-z\rangle = \langle x, y-z\rangle - \langle y, y-z\rangle$$

(Bilineerlik)

$$= \cancel{\langle x, y\rangle} - \cancel{\langle x, z\rangle} - \langle y, y\rangle + \langle y, z\rangle$$

$$= \langle y, z\rangle - \|y\|^2$$

$$\|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2} = (\langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle)^{1/2}$$

$$= (\underbrace{\langle x, x\rangle}_{\langle y,y\rangle = \|y\|^2} - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|^2})^{1/2}$$

$$= (2\|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle)^{1/2}$$

$$\|y-z\| = (2\|z\|^2 - 2\langle y, z\rangle)^{1/2} = (2\|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle y, z\rangle - \|y\|^2}{2\|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle} = \frac{\langle x, y\rangle - \|y\|^2}{2\|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$(\theta \in [0, \pi])$

Soru: $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $u_1 = \|y\|x + \|x\|y$ ve $u_2 = \|y\|x - \|x\|y$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: u_1, u_2 ortogonaldir $\Leftrightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle \underbrace{\|y\|}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{\|x\|}_{\in \mathbb{R}} y, \underbrace{\|y\|}_{\in \mathbb{R}} x - \underbrace{\|x\|}_{\in \mathbb{R}} y \rangle$$

(bilineerlik) $= \|y\| \langle x, \|y\|x - \|x\|y \rangle + \|x\| \langle y, \|y\|x - \|x\|y \rangle$

$$= \|y\|^2 \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} - \cancel{\|y\|\|x\| \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\langle x, y \rangle}} + \cancel{\|x\|\|y\| \langle y, x \rangle} - \|x\|^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|^2}$$

$$= \|y\|^2 \|x\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$= 0$$

$\therefore u_1, u_2$ ortogonaldir.

Soru: $x=(1,4,-2)$, $y=(2,1,3)\in\mathbb{R}^3$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösteriniz. Bu vektörlere ortogonal olan sıfırdan farklı bir vektör bulunuz.

Çözüm: $\langle x,y\rangle = \langle (1,4,-2),(2,1,3)\rangle = 1\cdot 2+4\cdot 1+(-2)\cdot 3=0$

$\Rightarrow$ x ile y ortogonaldir.

Şimdi, bu vektörlere ortogonal bir $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ vektörü bulalım.

$\langle x,(a,b,c)\rangle=0 \Leftrightarrow \langle (1,4,-2),(a,b,c)\rangle=0$

$\Leftrightarrow a+4b-2c=0$

$\langle y,(a,b,c)\rangle=0 \Leftrightarrow \langle (2,1,3),(a,b,c)\rangle=0 \Leftrightarrow 2a+b+3c=0$

$$\left.\begin{array}{l} a+4b-2c=0 \\ 2a+b+3c=0 \end{array}\right\} \; c=1 \text{ alırsak } \begin{array}{r} -2/\, a+4b=2 \\ 2a+b=-3 \\ \hline -7b=-7 \Rightarrow b=1 \end{array}$$

$a+4b=2 \Rightarrow a+4=2 \Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow (a,b,c)=(-2,1,1)$ vektörü x ve y ye

ortogonaldir.

Soru: V bir reel iç çarpım uzayı, $U=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subset V$ bir ortonormal küme olsun. $\forall x\in V$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{(Bessel eşitsizliği)}$$

dir.

Çözüm: $x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i$ vektörünü ele alalım.

Norm tanımından $\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i\| \geq 0$ dır.

$$\|x-\sum_{i=1}\langle x,x_i\rangle x_i\|^2 = \langle x-\sum_{i=1}\underbrace{\langle x,x_i\rangle}_{\in\mathbb{R}}x_i\,,\ x-\sum_{j=1}\underbrace{\langle x,x_j\rangle}_{\in\mathbb{R}}x_j\rangle$$

(Bilineerlik) $$= \langle x\,,\ x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle x_j\rangle$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle\langle x_i\,,\ x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle x_j\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle-\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle\langle x,x_j\rangle$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle\langle x_i,x\rangle+\Big(\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\langle x,x_j\rangle\Big)\underbrace{\langle x_i,x_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

(simetri) $$= \|x\|^2-2\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle\langle x,x_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle^2$$

$$= \|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle^2$$

$$\Rightarrow \|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle^2\geq 0 \Rightarrow \|x\|^2\geq\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle^2.$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite11

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"