ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite10

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

$x=(0,1)$ için de $b^2x_2^2-adx_2^2<0$ olmalıdır.

$\Rightarrow b^2-ad<0 \Rightarrow ad-b^2>0 \underset{b=c}{\Rightarrow} ad-bc>0$

$\therefore$ Verilen fonksiyonun iç çarpım olması için

$b=c$, $a>0$ ve $ad-bc>0$

olmalıdır.

Norm ve Ortogonallik

İç çarpım aksiyomları bize "uzunluk" ve "ortogonallik" kavramlarını tarif etme imkanı sunar. $\forall x\in V$ için $\langle x,x\rangle\geq 0$ ve $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle=0$ olduğundan aşağıdaki tanımı vermek mümkündür.

Tanım: V, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\langle\ ,\ \rangle$; V de bir iç çarpım olsun.

a) $\forall x\in V$ için $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ reel sayısına x in normu veya boyu denir ve $\|x\|$ ile gösterilir.

$$\|x\| = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R} \quad (x \text{ in normu, boyu})$$

Eğer $\|x\| = 1$ ise x e birim vektör denir.

b) $x, y \in V$ vektörleri için $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y ye ortogonaldir denir.

c) $U \subset V$ olmak üzere U daki tüm vektörlere ortogonal olan vektörlerin kümesine U nun ortogonal tümleyeni denir ve $U^{\perp}$ ile gösterilir.

$$U^{\perp} = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in U\}.$$

Örnek: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün standart iç çarpıma göre normu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

dir.

Not: iç çarpım değiştiğinde vektörün normu da değişir.

Örnek: $(\sqrt{3}, -3, -2) \in \mathbb{R}^3$ ün standart iç çarpıma göre normu

$$\|(\sqrt{3}, -3, -2)\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = 4$$

Norm ve ortogonalliğin temel özellikleri aşağıdaki teoremde verilmiştir. Bu özellikler matematikte çok önemli bir yere sahiptir.

Teorem: V bir reel vektör uzayı ve $\langle , \rangle$; V de bir iç çarpım olsun.

i) $\forall x \in V$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$\|cx\| = |c| \|x\|$$

dir.

ii) <u>(Pisagor Teoremi)</u>: $x, y \in V$ için $\langle x, y\rangle = 0$ ise

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dir.

iii) <u>(Cauchy-Schwarz eşitsizliği)</u>: $\forall x, y \in V$ için

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

v) <u>(Üçgen eşitsizliği)</u>: $\forall x, y \in V$ için

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

v) $\forall U \subset V$ için $U^{\perp}$; V nin alt vektör uzayıdır.

<u>İspat:</u>

i) $\forall x \in V$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} = \sqrt{c^2\langle x, x\rangle} = |c|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |c|\|x\|$$

ii) $x, y \in V$ için $\langle x, y\rangle = 0$ olsun. İç çarpımın simetri özelliğinden $\langle y, x\rangle = 0$ dır.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{0} + \langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

iii) $x = 0_{\mathbb{R}^3}$ veya $y = 0_{\mathbb{R}^3}$ ise eşitsizlik doğrudur.

$y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ olduğunu kabul edelim.

$c = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$ olarak alınırsa

$$\langle x - cy, cy\rangle = c\langle x - cy, y\rangle = c[\langle x,y\rangle - c\langle y,y\rangle]$$

$$= c\left[\langle x,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle y,y\rangle\right]$$

$$= c\left[\langle x,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\|y\|^2\right] = 0$$

elde edilir. Bu ise $x-cy$ ile cy vektörlerinin ortogonal olması demektir. Pisagor teoremi kullanılırsa

$$\|x-cy+cy\|^2 = \|x-cy\|^2 + \|cy\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|^2 = \|x-cy\|^2 + \|cy\|^2$$

elde edilir.

$$\Rightarrow \|x-cy\|^2 = \|x\|^2 - \|cy\|^2$$

Buradan

$$0 \leq \|x-cy\|^2 = \|x\|^2 - |c|^2\|y\|^2 \underset{\text{(i) den}}{=} \|x\|^2 - c^2\|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

elde edilir.

$$\Rightarrow 0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

iv) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

elde edilir.

v) Tanımdan $U^{\perp} = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in U\}$ yazılır.

$\langle 0_V, x \rangle = \langle 0.0_V, x \rangle = 0 \langle 0_V, x \rangle = 0$ olup $0_V \in U^{\perp}$ dir.

Yani $U^{\perp} \neq \phi$ dir.

$\forall x_1, x_2 \in U^{\perp}$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım. $\forall y \in U$ için

$$\langle cx_1 + x_2, y \rangle = c \underbrace{\langle x_1, y \rangle}_{0} + \underbrace{\langle x_2, y \rangle}_{0} = 0$$

olup $cx_1 + x_2 \in U^{\perp}$ dir.

$\therefore$ $U^{\perp}$; V nin alt vektör uzayıdır.

Sonuç: V bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde $\forall x,y \in V$ için $d(x,y)=\|y-x\|$ şeklinde tanımlanan d uzaklık fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $d(x,y) \geq 0$ ve $(d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y)$ dir.

ii) $d(x,y)=d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$, $\forall z \in V$.

İspat:

i) $d(x,y)=\|y-x\|=\langle y-x, y-x\rangle^{1/2} \geq 0$

$\|y-x\|=0 \Leftrightarrow \langle y-x, y-x\rangle=0 \Leftrightarrow y-x=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) $d(x,y)=\|y-x\|=\|(-1)(x-y)\|=|-1|\,\|x-y\|=d(y,x)$

iii) $d(x,z)=\|z-x\|=\|z-y+y-x\| \leq \|z-y\|+\|y-x\|$

$= d(z,y)+d(x,y)$

$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y)+d(z,y)$

Sonuç: V bir reel vektör uzayı olsun. $x \neq 0_V \neq y$ olan $\forall x, y \in V$ için

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

dir.

İspat: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

olup

$$-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$$

elde edilir. Eşitsizlik $\|x\|\|y\|$ ile bölünürse

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

bulunur.

Böylece, iki vektör arasındaki açı kavramını ifade edebiliriz.

Tanım: x ve y bir reel vektör uzayında vektörler ve $\langle , \rangle$ bu reel vektör uzayında bir iç çarpım olmak üzere x ile y arasındaki θ açısı

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

ile tanımlıdır.

Not: Tanımda verilen x ve y vektörlerinin sıfır vektörü olmadığına dikkat ediniz.

Örnek: $x = (2, -2, 0, -1)$, $y = (1, -1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ vektörlerinin arasındaki θ açısını standart iç çarpıma göre hesaplayalım.

Çözüm: $\langle x,y\rangle = \langle (2,-2,0,-1),(1,-1,-1,1)\rangle = 2+2-1=3$

$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \sqrt{4+4+0+1} = 3$

$\|y\| = \langle y,y\rangle^{1/2} = \sqrt{1+1+1+1} = 2$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \dfrac{3}{3.2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$ olup

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ tür.

Örnek: $\forall a,b,\theta \in \mathbb{R}$ için $|a\cos\theta + b\sin\theta| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $x=(a,b)$, $y=(\cos\theta,\sin\theta)$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$de standart iç çarpım için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

olacağından

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle (a,b), (\cos\theta, \sin\theta)\rangle|$$

$$= |a\cos\theta + b\sin\theta| \leq \sqrt{a^2+b^2}\,\underbrace{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}_{1}$$

$$\Rightarrow |a\cos\theta + b\sin\theta| \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

elde edilir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ teki standart iç çarpımı göz önüne alarak $U = \{(1,-1,1), (1,1,0), (2,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ ün $U^\perp$ ortogonal tümleyenini bulunuz.

Çözüm: $U^\perp = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in U\}$

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in U^\perp$ alalım.

$$\langle x, (1,-1,1)\rangle = 0 \Rightarrow \langle (x_1, x_2, x_3), (1,-1,1)\rangle = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (1,1,0)\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$\langle (x_1, x_2, x_3), (2,0,1) \rangle = 0 \Rightarrow 2x_1 + x_3 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in U^\perp \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$2x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = t$ dersek $x_1 = -\frac{t}{2}$ olur.

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 = \frac{t}{2}$

O halde, $x = (x_1, x_2, x_3) \in U^\perp$ vektörü $x = (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t)$,

$t \in \mathbb{R}$ şeklinde olup

$$U^\perp = \{(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite10

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"