ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite9

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

İç Çarpım Uzayları

Tanım: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle\, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow \langle\, , \rangle (x,y) = \langle x, y\rangle$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona V üzerinde bir iç çarpım denir.

1) $\forall x, y \in V$ için $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (Simetri)

2) $\forall x, y, z \in V$, $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ (Bilineerlik)

$\langle cx, y\rangle = \langle x, cy\rangle = c\langle x, y\rangle$

3) $\forall x \in V$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve eğer $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_V$ dır.
(Pozitif tanımlılık)

Örnek: $V=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ olsun.
$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpımdır, gösterelim:

1) Simetri: $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i=\langle y,x\rangle$

2) Bilineerlik: $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$

$$\langle x+y,z\rangle=\langle (x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)\rangle$$
$$=\langle (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i=\sum_{i=1}^{n}[(x_i z_i)+(y_i z_i)]=\sum_{i=1}^{n}x_i z_i+\sum_{i=1}^{n}y_i z_i$$
$$=\langle (x_1,x_2,\dots,x_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)\rangle+$$
$$+\langle (y_1,y_2,\dots,y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)\rangle$$
$$=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$$

$$\langle x, y+z\rangle \underset{\text{(simetri)}}{=} \langle y+z, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle$$

$$\langle cx, y\rangle = \langle c(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle$$

$$= \langle (cx_1, cx_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c x_i y_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle$$

$$= c\langle x, y\rangle$$

$$\langle x, cy\rangle \underset{\text{(simetri)}}{=} \langle cy, x\rangle = c\langle y, x\rangle \underset{\text{(simetri)}}{=} c\langle x, y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle cx, y\rangle = \langle x, cy\rangle = c\langle x, y\rangle$$

3) <u>Pozitif tanımlılık:</u>

$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $x \neq 0 \Rightarrow \exists i = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i \neq 0$ olup

$\sum_{i=1} x_i \neq 0$ olur.

$\Rightarrow x \neq 0$ iken $\langle x, x\rangle \neq 0$ dır.

$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$:

$(\Rightarrow)$ $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow x = (0, 0, \ldots, 0)$
$= 0_V$

$\therefore$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ fonksiyonu bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma standart iç çarpım veya öklid iç çarpımı denir.

Uygulama

Soru: V bir vektör uzayı olmak üzere U_1 ve U_2; V nin alt vektör uzayı olsun. $U_1 \cup U_2$; V nin alt vektör uzayı mıdır? Araştırınız.

Çözüm: $U_1 \cup U_2$ nin alt vektör uzayı olma şartlarını sağlayıp sağlamadığını inceleyelim.

1) $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$: $U_1 \subset U_1 \cup U_2$ ve U_1 bir alt vektör uzayı olduğundan $U_1 \neq \emptyset$ olup $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$ elde edilir.

2) $\forall x, y \in U_1 \cup U_2$, $\forall c \in F$ için $cx + y \in U_1 \cup U_2$ mi?

$\forall x, y \in U_1 \cup U_2$, $\forall c \in F$ alalım.

$x, y \in U_1 \cup U_2 \Rightarrow x \in U_1$ veya $x \in U_2$ veya $x \in U_1 \cap U_2$
$y \in U_1$ veya $y \in U_2$ veya $y \in U_1 \cap U_2$

$x \in U_1$, $y \in U_2$ olması durumunda $cx + y$ nin $U_1 \cup U_2$ de olduğunu garanti edemeyiz. (Aynı durum $x \in U_2$, $y \in U_1$ olduğunda da söz konusudur).

$\therefore$ $U_1 \cup U_2$; U nun alt vektör uzayı olmayabilir.

Ödev: $U_1 \cup U_2$; U nun alt vektör uzayıdır $\Leftrightarrow$ $U_1 \subset U_2$ ve $U_2 \subset U_1$ dir, gösteriniz.

Soru: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere aşağıda verilen kümelerin alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : 2x_1 - x_2 = 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = 0\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}^n : 3x_1 + 4x_2 = 0\}$

Çözüm: $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$U \neq \emptyset$, $U \subset V$ alt vektör uzayıdır $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in U$, $\forall c \in F$ için $cx + y \in U$ $\Leftrightarrow$ $x + y \in U$, $cx \in U$

a) $c=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$, $x=(\underbrace{1}_{x_1},0,0,\dots,0)\in A$ için $\frac{1}{2}x=(\underbrace{\frac{1}{2}}_{x_1},0,\dots,0)\notin A$

olduğundan A alt vektör uzayı değildir.

b) . $\underline{B\neq\emptyset:}$ $x=0_{\mathbb{R}^n}=(0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$ için $2x_1-x_2=0$ olup

$x=0_{\mathbb{R}^n}\in B$ dir. Böylece, $B\neq\emptyset$ dir.

. $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in B$, $\forall c\in\mathbb{R}$ için $cx+y\in B$ mi?

$x,y\in B \Rightarrow 2x_1-x_2=0,\ 2y_1-y_2=0$

$cx+y=c(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(cx_1+y_1,cx_2+y_2,\dots,cx_n+y_n)$

$cx+y\in B \Leftrightarrow 2(cx_1+y_1)-(cx_2+y_2)=0 \Leftrightarrow 2cx_1+2y_1-cx_2-y_2=0$

$\Leftrightarrow c(\underbrace{2x_1-x_2}_{0})+\underbrace{2y_1-y_2}_{0}=0$

O halde, $cx+y\in B$ olup B alt vektör uzayıdır.

c) Ödev

d) . $\underline{D \neq \phi}$: $0_{\mathbb{R}^n} = (0,0,\dots,0)$ için $3x_1 + 4x_2 = 3.0 + 4.0 = 0$ olup

$0_{\mathbb{R}^n} \in D$ dir.

. $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım.

$x, y \in D \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 = 0,\ 3y_1 + 4y_2 = 0.$

$cx + y = (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n)$

$3(cx_1 + y_1) + 4(cx_2 + y_2) = 0 \Rightarrow cx + y \in D$ olur.

$$3(cx_1 + y_1) + 4(cx_2 + y_2) = 3cx_1 + 3y_1 + 4cx_2 + 4y_2$$

$$= c(\underbrace{3x_1 + 4x_2}_{0}) + \underbrace{3y_1 + 4y_2}_{0}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow cx + y \in D$ olup D alt vektör uzayıdır.

Soru: $\forall x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ için $\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2$ şeklinde tanımlanan $\langle\,,\rangle:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir iç çarpım mıdır? Gösteriniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun iç çarpım olması için simetri, bilineerlik ve pozitif tanımlılık özelliklerini sağlaması gerekir.

1) Simetri: $\forall x,y\in\mathbb{R}^3$ için $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ midir?

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2 = y_1x_1+y_2x_2 = \langle y,x\rangle$$

2) Bilineerlik: $\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_n),\ z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^3,$
$\forall c\in\mathbb{R}$ için

$$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle,\quad \langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$$

$$\langle cx,y\rangle=\langle x,cy\rangle=c\langle x,y\rangle \text{ midir?}$$

Ödev olarak bu özelliklerin sağlandığını gösteriniz.

3) Pozitif tanımlılık: $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ mıdır?

$x = (0,0,2) \in \mathbb{R}^3$ için $\langle x, x \rangle = \langle (0,0,2), (0,0,2) \rangle = 0.0 + 0.0 = 0$

dır. Fakat $x \neq (0,0,0)$ olduğundan pozitif tanımlılık özelliği sağlanmaz.

$\therefore$ Verilen fonksiyon iç çarpım değildir.

Soru: $\forall x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\langle x, y \rangle = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2$ şeklinde tanımlanan $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun iç çarpım olması için gerek yeter şart $b = c$, $a > 0$ ve $ad - bc > 0$ olmasıdır, gösteriniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun iç çarpım olması için gerek yeter şart simetri, bilineerlik ve pozitif tanımlılık özelliklerinin sağlanmasıdır.

1) Simetri özelliği sağlanır $\Leftrightarrow \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle, \ \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \langle (y_1,y_2),(x_1,x_2)\rangle$

$\Leftrightarrow \cancel{a x_1 y_1} + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + \cancel{d x_2 y_2} = \cancel{a y_1 x_1} + b y_1 x_2 + c y_2 x_1 + \cancel{d y_2 x_2}$

$\Leftrightarrow \quad b x_1 y_2 - c x_1 y_2 + c x_2 y_1 - b x_2 y_1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (b-c) x_1 y_2 + (c-b) x_2 y_1 = 0, \ \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

Bu son eşitlik $x=(x_1,x_2)=(1,0)$, $y=(y_1,y_2)=(0,1)$ için de sağlanır. Son eşitlikte $x_1=1, x_2=0, y_1=0, y_2=1$ yazılırsa

$$b-c=0 \Leftrightarrow b=c$$

elde edilir.

2) Bilineerlik sağlanır $\Longleftrightarrow$ i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

ii) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ $\quad \forall c \in \mathbb{R}$

iii) $\langle cx, y\rangle = \langle x, cy\rangle = c\langle x, y\rangle$

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$$\Leftrightarrow \langle \underbrace{(x_1, x_2)+(y_1, y_2)}_{(x_1+y_1,\ x_2+y_2)}, (z_1, z_2)\rangle = \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle$$

$$\Longleftrightarrow a(x_1+y_1)z_1 + b(x_1+y_1)z_2 + c(x_2+y_2)z_1 + d(x_2+y_2)z_2$$

$$= ax_1z_1 + bx_1z_2 + cx_2z_1 + dx_2z_2 + ay_1z_1 + by_1z_2 + cy_2z_1 + dy_2z_2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{ax_1z_1} + \cancel{ay_1z_1} + \cancel{bx_1z_2} + \cancel{by_1z_2} + \cancel{cx_2z_1} + \cancel{cy_2z_1} + \cancel{dx_2z_2} + \cancel{dy_2z_2}$$

$$= \cancel{ax_1z_1} + \cancel{bx_1z_2} + \cancel{cx_2z_1} + \cancel{dx_2z_2} + \cancel{ay_1z_1} + \cancel{by_1z_2} + \cancel{cy_2z_1} + \cancel{dy_2z_2}$$

Ödev olarak (ii) ve (iii) özelliklerinin de sağlandığını gösteriniz.

c) Pozitif tanımlılık: $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$ ve

$(\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0)$

$$\langle x,x\rangle = \langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2 x_1 + d x_2^2$$

$$= a x_1^2 + (b+c) x_1 x_2 + d x_2^2$$

$$((1)\text{den } b=c) \quad = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2$$

Son eşitlikte $x_1 = t$, $2bx_2 = B$, $dx_2^2 = C$, $a = A$ dersek

$$\langle x,x\rangle = At^2 + Bt + C$$

elde ederiz. Sağ tarafın diskriminantı

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

olup $x \neq (0,0)$ iken $\langle x,x\rangle > 0$ olması için $a>0$ ve $\Delta<0$ olmalıdı

$$\Delta < 0 \iff B^2 - 4AC < 0 \iff 4b^2x_2^2 - 4adx_2^2 < 0$$

$$\iff b^2x_2^2 - adx_2^2 < 0.$$

$x=(0,1)$ için de $b^2x_2^2 - adx_2^2 < 0$ olmalıdır.

$\Longrightarrow b^2 - ad < 0 \Rightarrow ad - b^2 > 0 \underset{b=c}{\Rightarrow} ad - bc > 0$

$\therefore$ Verilen fonksiyonun iç çarpım olması için

$b=c$, $a>0$ ve $ad-bc>0$

olmalıdır.

Norm ve Ortogonallik

İç çarpım aksiyomları bize "uzunluk" ve "ortogonallik" kavramlarını tarif etme imkanı sunar. $\forall x \in V$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$ ve $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle x,x\rangle = 0$ olduğundan aşağıdaki tanımı vermek mümkündür.

Tanım: V, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\langle\, , \rangle$; V de bir iç çarpım olsun.

a) $\forall x \in V$ için $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ reel sayısına x in normu

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite9

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"