ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite8

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Vektör Uzayı Aksiyomlarından Çıkan Sonuçlar

$(V,+)$; $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

0_V : V nin birim elemanı (sıfır vektörü)

0 : F de "+" işleminin birim elemanı

1 : F de "." " " "

$-x$: $x \in V$ nin tersi , $-c$: $c \in F$ in "+" işlemine göre tersi

c^{-1} : $c \in F$ in "." işlemine göre tersi

Sonuç 1: $\forall x \in V$ için $0x = 0_V$ dır.

İspat: $\forall x \in V$ alalım.

$0x = (0+0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x$ idempotent eleman olup

(Dış işlem aksiyomlarından)

V nin birim elemanına eşittir.

$\Rightarrow 0.x = 0_V , \forall x \in V$.

Sonuç 2: $\forall c \in F$ için $c0_V = 0_V$ dir.

İspat: $\forall c \in F$ alalım.

$$\underbrace{c0_V}_{\in V} = c(0_V + 0_V) = \underbrace{c0_V}_{\in V} + \underbrace{c0_V}_{\in V} \Rightarrow c0_V \text{ idempotent eleman}$$

V bir grup olduğundan idempotent eleman birim elemana eşittir.

$$\Rightarrow c0_V = 0_V, \ \forall c \in F.$$

Sonuç 3: $\forall c \in F, \forall x \in V$ için $-(cx) = (-c)x = c(-x)$ dir.

İspat: $\forall c \in F, \forall x \in V$ alalım.

$$\underline{-(cx)} = -1(cx) = (-1c)x = \underline{(-c)x} = (c.-1)x = c(-1x) = \underline{c(-x)}$$

$$\Rightarrow -(cx) = (-c)x = c(-x), \ \forall c \in F, \ \forall x \in V.$$

Sonuç 4: $cx = 0_V \Leftrightarrow c = 0$ veya $x = 0_V$

İspat: $(\Rightarrow)$ $cx = 0_V$ olduğunu kabul edelim. $c = 0$ ise ispat tamamdır. $c \neq 0$ ise cisim tanımından $c \in F$ nin "." işlemine göre tersi c^{-1} mevcuttur.

$$cx = 0_V \Rightarrow c^{-1}(cx) = c^{-1}0_V \Rightarrow \underbrace{(c^{-1}c)}_{1}x = 0_V \Rightarrow x = 0_V$$

$(\Leftarrow)$ $c = 0 \Rightarrow cx = 0x = 0_V$, $x = 0_V \Rightarrow cx = c \cdot 0_V = 0_V$.

Sonuç 5: $x, y \in V$, $c \in F$ olmak üzere $cx = cy$ ve $c \neq 0$ ise $x = y$ dir.

İspat: $cx = cy$ ve $c \neq 0$ olsun.

$$\Rightarrow cx - cy = 0_V \Rightarrow c(x-y) = 0_V \Rightarrow c \neq 0 \text{ olup } x - y = 0_V$$

dir $\Rightarrow x = y$

Sonuç 6: $c_1, c_2 \in F$ ve $x \in V$ için $c_1 x = c_2 x$ ve $x \neq 0_V$ ise $c_1 = c_2$ dir

İspat: $c_1 x = c_2 x$ ve $x \neq 0_V$ olsun.

$\Rightarrow c_1 x - c_2 x = 0_V \Rightarrow (c_1 - c_2) x = 0_V \Rightarrow x \neq 0_V$ olup

$c_1 - c_2 = 0$ dır $\Rightarrow c_1 = c_2$

Alt Vektör Uzayları

Tanım: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $U \neq \emptyset$, $U \subset V$ olsun. U; V deki işlemler ile birlikte F cismi üzerinde bir vektör uzayı oluyorsa U ya V nin alt vektör uzayı denir.

Örnek: V bir vektör uzayı olmak üzere $\{0_V\}$ ve V kümeleri V nin alt vektör uzaylarıdır. $\{0_V\}$ ye V nin aşikar alt vektör uzayı denir.

Teorem: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $U \neq \emptyset$, $U \subset V$ alt kümesinin V nin alt vektör uzayı olması için gerek yeter şart

i) $\forall x, y \in U$ için $x+y \in U$,

ii) $\forall x \in U$, $\forall c \in F$ için $cx \in U$

olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) Vektör uzayı tanımından açıktır.

($\Longleftarrow$) $U \neq \emptyset$, $U \subset V$ olsun. i) ve ii) yi kabul edelim.

1) $(U,+)$ bir Abel grubudur: Bunu göstermek için U nun V nin bir alt grubu olduğunu göstermeliyiz. $\forall x, y \in U$ alalım. ii) den dolayı $c = -1 \in F$ ve $y \in U$ için $-1 \cdot y = -y \in U$ olur. $x, -y \in U$ için (i) den $x - y \in U$ olur ki bu ise U nun alt grup dolayısıyla Abel grup olması demektir.

2) Dış işlem aksiyomları sağlanır: $U \subset V$ olduğundan U daki her eleman V ye aittir. V bir vektör uzayı olduğundan dış işlem aksiyomları sağlanır. Dolayısıyla, U dış işlem aksiyomlarını sağlar.

$\therefore U$, V nin bir alt vektör uzayıdır.

Sonuç: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $U \neq \emptyset$, $U \subset V$, V nin bir alt vektör uzayıdır ancak ve ancak $\forall c \in F$, $\forall x, y \in U$ için $cx + y \in U$ dır.

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) $U \neq \emptyset$, $U \subset V$, $\forall c \in F$, $\forall x, y \in U$ için $cx + y \in U$ olduğunu kabul edelim.

1) $c = 1$, $x, y \in U$ için $cx + y = 1.x + y = x + y \in U$ olur.

2) $y = 0_V$ olarak alınırsa $cx + y = cx + 0_V = cx \in U$ olur.

Böylece, bir önceki teoremin şartları sağlanır ve U, V nin alt vektör uzayı olur.

<u>Not:</u> U, V nin bir alt vektör uzayı ise

1) U, V nin alt grubudur,
2) $0_V \in U$ dur.
3) 0_V yi içermeyen alt küme alt vektör uzayı değildir.

<u>Örnek:</u> $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x,y) \in V : y = 0\}$, $U = \{(x,y) \in V : x = 0\}$, $T = \{(x,y) \in V : x = 1\}$ olsun. $(0,0) = 0_V \notin T$ olduğundan T, V nin alt vektör uzayı değildir.

<u>U; V nin alt vektör uzayıdır:</u>

1) <u>$U \neq \phi$:</u> $(0,0) = 0_V \in U \Rightarrow U \neq \phi$.

2) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım. $c(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in U$ mudur? $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.

$c(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\underbrace{cx_1 + x_2}_{0}, cy_1 + y_2) \in U$.

$\therefore$ U; V nin alt vektör uzayıdır.

Ödev: W; V nin alt vektör uzayıdır.

Örnek: F bir cisim, $V = F^n$ olsun. $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$ V nin alt vektör uzayıdır. Burada, $a_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir.

1) $(0, 0, \dots, 0) = 0_V \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$.

2) $\forall c \in F$, $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U$ alalım.

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$= (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \ \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (cx_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} (ca_i x_i + a_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} ca_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

$$= c \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}_{0} = 0.$$

$$\Rightarrow c(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U$$

$\therefore$ U; V nin alt vektör uzayıdır.

Tanım: V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset V$ olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \in V$ vektörüne $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörlerinin bir lineer birleşimi denir.

Teorem: V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset V$ olsun. $U = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i : a_i \in F, i = 1, 2, \dots, n\}$ kümesi V nin alt vektör uzayıdır.

İspat: 1) $U \neq \emptyset$: $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = 0 \in F$ olarak alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = 0_V \in U$$ olup $U \neq \emptyset$ dır.

2) $\forall x, y \in U$, $\forall c \in F$ alalım. $cx + y \in U$ mudur?

$x, y \in U \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i$, $a_i, b_i \in F$ şeklindedi

$$cx+y = c\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(ca_i\alpha_i + b_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(ca_i+b_i)}_{\in F}\alpha_i \in U$$

* Teoremdeki U alt vektör uzayına $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ vektörlerinin gerdiği alt uzay denir ve $U = sp\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ ile gösterilir.

<u>Teorem:</u> V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, I bir indis kümesi olmak üzere $\forall i\in I$ için U_i; V nin alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in I} U_i$ kümesi de V nin alt vektör uzayıdır.

<u>İspat:</u> 1) $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset$: $\forall i\in I$ için U_i alt vektör uzayı olup

$0_V \in U_i$ dir.

$$\Rightarrow 0_V \in \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \neq \emptyset.$$

2) $\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} U_i$, $\forall c \in F$ için $cx+y \in \bigcap_{i\in I} U_i$ midir?

$\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow x,y \in U_i$, $\forall i \in I$

$\forall i \in I$ için U_i alt vektör uzayı olup $cx+y \in U_i$ olur.

$\Rightarrow cx+y \in \bigcap_{i\in I} U_i$

$\therefore \bigcap_{i\in I} U_i$; V nin alt vektör uzayıdır.

Not: U_1, U_2; V nin alt vektör uzayı ise $U_1 \cup U_2$; V nin alt vektör uzayı olmak zorunda değildir.

Örnek: $V=\mathbb{R}^2$, $U_1=\{(2x,x) : x\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{(y,y) : y\in\mathbb{R}\}$ olsun. Ödev olarak U_1 ve U_2 nin $\mathbb{R}^2$ nin alt vektör uzayı olduğunun gösteriniz.

$U_1 \cup U_2$; $\mathbb{R}^2$ nin alt vektor uzayı değildir çünkü,

$(2,1) \in U_1$, $(1,1) \in U_2$ için $(2,1)+(1,1)=(3,2) \notin U_1 \cup U_2$

olup $U_1 \cup U_2$ toplamaya göre kapalı değildir. Dolayısıyla alt vektör uzayı olamaz.

Not: $i \in I$ için U_i; V nin alt vektör uzayı ise $\bigcap_{i \in I} U_i$; aynı zamanda her bir $j \in I$ için U_j nin de alt vektör uzayıdır. Çünkü $\bigcap_{i \in I} U_i \subset U_j$, $j \in I$ dir.

Tanım: $i=1,2,\ldots,n$ için U_i; V vektör uzayının alt vektör uzayı olmak üzere $U=\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mid \alpha_i \in U_i, i=1,2,\ldots,n\}$ kümesine $U_1, U_2, \ldots, U_n$ alt vektör uzaylarının toplamı denir ve $U=U_1+U_2+\ldots+U_n$ ile gösterilir.

Teorem: V; F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $i=1,2,\dots,n$ için U_i; V nin alt vektör uzayı olsun. Bu durumda,

$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ olmak üzere

1) U; V nin alt vektör uzayıdır,

2) $j=1,2,\dots,n$ için U_j; U nun alt vektör uzayıdır.

İspat:

1) $\underline{U \neq \emptyset}$: $\forall i=1,2,\dots,n$ için U_i alt vektör uzayı olup $0_V \in U_i$ olur ve böylece

$$\underbrace{0_V}_{\in U_1} + \underbrace{0_V}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{0_V}_{\in U_n} = 0_V \in U$$

dur.

$\forall c \in F$, $\forall x, y \in U$ için $cx + y \in U$ mudur?

$\forall c \in F$, $\forall x, y \in U$ alalım.

$x, y \in U \Rightarrow x = \underbrace{\alpha_1}_{\in U_1} + \underbrace{\alpha_2}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{\in U_n}, \quad y = \underbrace{\beta_1}_{\in U_1} + \underbrace{\beta_2}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{\beta_n}_{\in U_n}$

$$\Rightarrow cx + y = c(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

$$= \underbrace{(c\alpha_1 + \beta_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(c\alpha_2 + \beta_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(c\alpha_n + \beta_n)}_{\in U_n}$$

$$\Rightarrow cx + y \in U$$

$\therefore$ U; V nin alt vektör uzayıdır.

2) $\forall \alpha_j \in U_j$ alalım. $\alpha_j = \underbrace{0_V}_{\in U_1} + \underbrace{0_V}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{\alpha_j}_{\in U_j} + \underbrace{0_V}_{\in U_{j+1}} + \dots + \underbrace{0_V}_{\in U_j}$ olarak yazılır.

$\Rightarrow \alpha_j \in U \Rightarrow U_j \subset U$

$U_j \subset U$ olup U_j bir vektör uzayı olduğundan U nun alt vektör uzayıdır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite8

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"