UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite7

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Vektör Uzayları

<u>Tanım:</u> $(V,+)$ değişmeli grup, $(F,+,\cdot)$ cisim olsun.

$$\cdot : F \times V \longrightarrow V$$
$$(c,x) \longrightarrow \cdot(c,x) = cx$$

dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V ye F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

1) Dış işlem V deki işlem üzerine dağılımlıdır: $\forall c \in F$, $\forall x,y \in V$ için

$$c(x+y) = cx + cy$$

2) Dış işlem F deki "+" işlemi üzerine dağılımlıdır: $\forall c_1, c_2 \in F$, $\forall x \in V$ için

$$(c_1+c_2)x = c_1 x + c_2 x$$

3) Dış işlem F deki "." işlemi ile birleşimlidir: $\forall c_1, c_2 \in F$, $\forall x \in V$ için

$$(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$$

4) F in "·" işleminin birim elemanı θ olmak üzere $\forall x \in V$ için $\theta x = x$ dir.

Bu dört özelliğe dış işlem aksiyomları da denir.

Örnek: $(\mathbb{R},+)$ ikilisinin bir değişmeli grup ve $(\mathbb{R},+,\cdot)$ üçlüsünün bir cisim olduğunu biliyoruz. Reel sayılar kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bunun için dış işlem aksiyomlarına göz atalım. Buradaki dış işlem bildiğimiz çarpma işlemidir.

1) $c(x+y) = cx + cy$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

2) $(c_1+c_2)x = c_1x + c_2x$, $\forall c_1,c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

3) $c_1(c_2x) = (c_1 c_2)x$, $\forall c_1,c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4) $1x = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Örnek: Karmaşık sayılar kümesi reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır.

$\mathbb{C}=\{x=a+bi:\ a,b\in\mathbb{R}\}$ Karmaşık sayılar kümesi

Öncelikle $(\mathbb{C},+)$ ikilisinin değişmeli grup olduğunu gösterelim:

Kapalılık: $\forall\, x_1=a_1+b_1 i,\ x_2=a_2+b_2 i\in\mathbb{C}$ alalım.

$$x_1+x_2=(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=\underbrace{(a_1+a_2)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in\mathbb{R}}i\in\mathbb{C}$$

Birleşme: $\forall x_j=a_j+b_j i\in\mathbb{C},\ j=1,2,3$ alalım.

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)+x_3&=[(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)]+(a_3+b_3 i)\\&=[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i]+(a_3+b_3 i)\\&=[(a_1+a_2)+a_3]+[(b_1+b_2)+b_3]i\\&=[a_1+(a_2+a_3)]+[b_1+(b_2+b_3)]i\end{aligned}$$

(Reel sayıların birleşme özelliği)

$$= (a_1 + b_1 i) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) i]$$

$$= (a_1 + b_1 i) + [(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)]$$

$$= x_1 + (x_2 + x_3)$$

$\Rightarrow (\mathbb{C}, +)$ birleşme özelliğine sahiptir.

<u>Birim eleman:</u> $\forall x = a + bi \in \mathbb{C}$ için

$x + 0 = 0 + x = x$ olduğundan $0 = 0 + 0i$ bu işlemin birim elemanıdır.

<u>Ters eleman:</u> $\forall x = a + bi \in \mathbb{C}$ alalım. $x + y = y + x = 0$ olacak şekilde $y = c + di \in \mathbb{C}$ var mı?

$$x + y = 0 \Rightarrow (a + bi) + (c + di) = 0 \Rightarrow (a + c) + (b + d) i = 0$$

$$\Rightarrow a + c = 0,\ b + d = 0 \Rightarrow c = -a,\ d = -b \Rightarrow y = -a - bi \in \mathbb{C}$$

$$y + x = 0 \Rightarrow (c + di) + (a + bi) = 0 \Rightarrow (c + a) + (d + b) i = 0$$

$$\Rightarrow c + a = 0,\ d + b = 0 \Rightarrow c = -a,\ d = -b \Rightarrow y = -a - bi \in \mathbb{C}$$

O halde, $\forall x = a+bi \in \mathbb{C}$ elemanının tersi $y = -a-bi \in \mathbb{C}$ vardır.

Değişme: $\forall x_1 = a_1 + b_1 i, x_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ için $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ mi?

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

(reel sayıların değişme özelliği) $= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1) i = (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) = x_2 + x_1$

$\Rightarrow$ Değişmeli özelliği vardır. Böylece $(\mathbb{C}, +)$ ikilisi değişmeli (Abel) gruptur.

Şimdi de dış işlem aksiyomlarının sağlandığını görelim. Önce dış işlemi tanımlayalım:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(c, a+bi) \longrightarrow \cdot (c, a+bi) = ca + (cb) i$$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1 = a_1 + b_1 i,\ x_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ alalım.

1) $c_1(x_1 + x_2) = c_1[(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)] = c_1[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i]$

$= c_1(a_1 + a_2) + c_1(b_1 + b_2)i$

$= (c_1 a_1 + c_1 a_2) + (c_1 b_1 + c_1 b_2)i$ ($\mathbb{R}$ de "$\cdot$" işleminin "+" işlemi üzerine dağılma özelliği)

$= (c_1 a_1 + (c_1 b_1)i) + (c_1 a_2 + (c_1 b_2)i)$

$= c_1(a_1 + b_1 i) + c_1(a_2 + b_2 i)$

$= c_1 x_1 + c_2 x_2$

2) $(c_1 + c_2)x_1 = (c_1 + c_2)(a_1 + b_1 i) = (c_1 + c_2)a_1 + [(c_1 + c_2)b_1]i$

$= (c_1 a_1 + c_2 a_1) + (c_1 b_1 + c_2 b_1)i$

$= (c_1 a_1 + c_2 a_1) + [(c_1 b_1)i + (c_2 b_1)i]$

$= [c_1 a_1 + (c_1 b_1)i] + [c_2 a_1 + (c_2 b_1)i]$

$= [c_1(a_1+b_1 i)] + [c_2(a_1+b_1 i)]$

$= c_1 x_1 + c_2 x_1$

3) $c_1(c_2 x_1) = c_1(c_2(a_1+b_1 i)) = c_1(c_2 a_1 + (c_2 b_1) i)$

$= c_1(c_2 a_1) + c_1(c_2 b_1) i = (c_1 c_2) a_1 + (c_1 c_2) b_1 i$

$= (c_1 c_2)(a_1 + b_1 i) = (c_1 c_2) x_1$

4) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cisminde "$\cdot$" işleminin birim elemanı 1 için

$1x = 1(a+bi) = 1a + (1b)i = a + bi = x$

$\therefore$ $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır.

Örnek: Her cisim kendi üzerinde bir vektör uzayıdır

- $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır,
- $\mathbb{C}$; $\mathbb{C}$ " " " " ,

Örnek:
- $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$ " " " " ,
- $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ " " " uzayı değildir. ($i \in \mathbb{C}$, $2 \in \mathbb{R}$ fakat $2i \notin \mathbb{R}$)

Örnek: $(F,+,\cdot)$ bir cisim olmak üzere

$F^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in F, i=1,2,\dots,n\}$ olsun. "+" işlemini

$\forall (x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n) \in F^n$ için

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

ve dış işlemi $\forall c \in F$ ve $\forall (x_1,x_2,\dots,x_n) \in F^n$ için

$$c(x_1,x_2,\dots,x_n)=(cx_1,cx_2,\dots,cx_n)$$

şeklinde tanımlarsak

F^n, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

i) $(F^n, +)$ ikilisi bir Abel gruptur:

. "+" işlemi F de birleşimli olduğundan F^n üzerinde de birleşimlidir.

. $0_{F^n} = (0, 0, \ldots, 0)$ birim elemandır.

. $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$ elemanının tersi $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ dir.

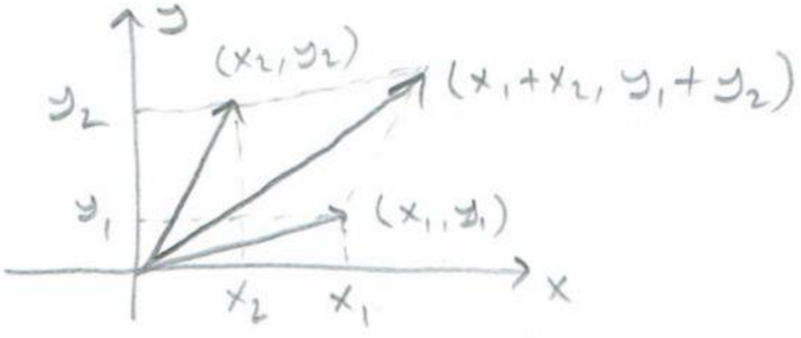
. "+" işlemi F de değişmeli olduğundan F^n üzerinde de değişmelidir.

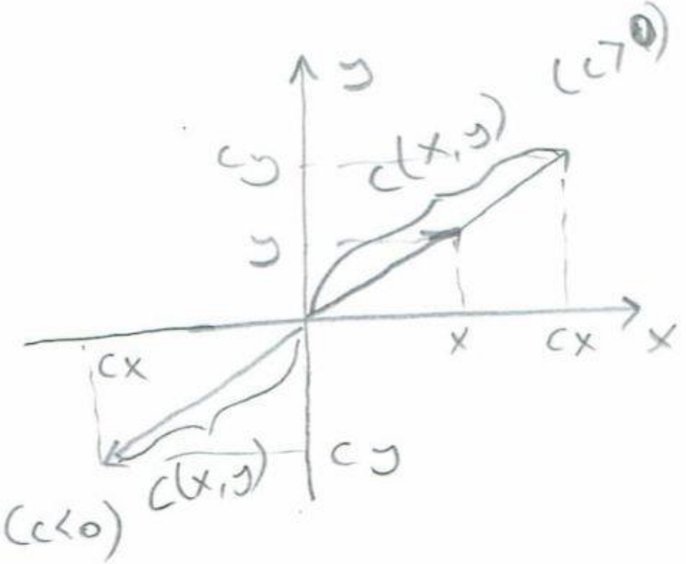
ii) Dış işlem aksiyomları sağlanır: $\forall c_1, c_2 \in F$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x^n) \in F^n$ için

$$(c_1+c_2)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((c_1+c_2)x_1, (c_1+c_2)x_2, \ldots, (c_1+c_2)x_n)$$
$$= (c_1x_1 + c_2x_1, c_1x_2 + c_2x_2, \ldots, c_1x_n + c_2x_n)$$
$$= (c_1x_1, c_1x_2, \ldots, c_1x_n) + (c_2x_1, c_2x_2, \ldots, c_2x_n)$$
$$= c_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + c_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ödev olarak diğer dış işlem aksiyomlarının sağlandığını gösteriniz.

Örnek: $n=2$, $F=\mathbb{R}$ ise $\mathbb{R}^2=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.





Örnek: $V=\mathbb{R}^+$ ve $F=\mathbb{R}$ olsun. $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$, $\forall c\in\mathbb{R}$ için

$x\oplus y = xy$

$c\odot x = x^c$ (dış işlem)

şeklinde tanımlanırsa V, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Gösterelim.

i) $(V,\oplus)$ Abel gruptur:

. $\forall x,y \in V=\mathbb{R}^+$ için $x\oplus y = xy = yx = y\oplus x \Rightarrow$ Değişmeli

. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^+$ için

$$x\oplus(y\oplus z) = x\oplus(yz) = x(yz) = (xy)z = (xy)\oplus z = (x\oplus y)\oplus z$$

$\Rightarrow$ Birleşimli

. $\forall x\in\mathbb{R}^+$ için $x\oplus y = y\oplus x = x \Leftrightarrow xy = x,\ yx = x \Leftrightarrow y = 1$

$\oplus$ işleminin birim elemanı $0_V = 1$ dir.

. $\forall x\in\mathbb{R}^+$ için $x\oplus y = y\oplus x = 1 \Leftrightarrow xy = yx = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ $(x\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow x\neq 0)$

$x\in\mathbb{R}^+$ nın tersi $\frac{1}{x}$ dir.

$\therefore (V,\oplus)$ değişmeli gruptur.

ii) Dış işlem aksiyomları sağlanır:

. $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$(c_1+c_2)\odot x = x^{c_1+c_2} = x^{c_1}x^{c_2} = (c_1 \odot x)(c_2 \odot x) = (c_1 \odot x)\oplus(c_2 \odot x)$$

. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$$c\odot(x\oplus y) = c\odot(xy) = (xy)^c = x^c y^c = (c\odot x)(c\odot y) = (c\odot x)\oplus(c\odot y)$$

. $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$c_1\odot(c_2\odot x) = c_1\odot x^{c_2} = (x^{c_2})^{c_1} = x^{c_2 c_1} = x^{(c_1 c_2)} = (c_1 c_2)\odot x$$

. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\quad 1\odot x = x^1 = x$

$\therefore$ $V=\mathbb{R}^+$ $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Not: Daha kısa olarak $(\underbrace{V, \oplus}_{\text{Abel grup}}, \underbrace{\mathbb{R}, +, \cdot}_{\text{cisim}}, \underbrace{\odot}_{\text{Dış işlem}})$ altılısı bir vektör uzayıdır diyebiliriz.

Tanım: Vektör uzayının her elemanına vektör denir

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite7

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"