ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite6

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Uygulama

Soru: Bir $(R, T, \perp)$ halkasında $\forall a \in R$ için $a \perp a = a$ ise T işleminin birim elemanı e olmak üzere

i) $a T a = e$ ii) $a \perp b = b \perp a$, $\forall b \in R$

dır, gösteriniz.

Çözüm: $(R, T, \perp)$ bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $a \perp a = a$ olduğunu kabul edelim.

i) $(R, T, \perp)$ bir halka olduğundan (R, T) ikilisi değişmeli grup olup ters eleman özelliğine sahiptir. Dolayısıyla, $a \in R$ nin T işlemine göre tersi $a^{-1} \in R$ vardır.

$a \perp a = a$ eşitliği a^{-1} için de geçerlidir. Yani,

$a^{-1} \perp a^{-1} = a^{-1}$ dir.

$$a \perp (a^{-1} \perp a^{-1}) = a \perp a^{-1} \Rightarrow a \perp (\underbrace{a \perp a}_{a}) = (\underbrace{a \perp a}_{a})^{-1}$$

$$(x^{-1} \perp y = x \perp y^{-1} = (x \perp y)^{-1} \text{ ve } x^{-1} \perp y^{-1} = x \perp y \text{ idi})$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \perp a}_{a} = a^{-1} \Rightarrow a = a^{-1}$$

O halde, $a \top a = a \top a^{-1} = e$ elde edilir.

ii) $$(a \top b) \perp (a \top b) = [(a \top b) \perp a] \top [(a \top b) \perp b]$$

$$= [(\underbrace{a \perp a}_{a}) \top (b \perp a)] \top [(a \perp b) \top (\underbrace{b \perp b}_{b})]$$

$$= a \top (b \perp a) \top (a \perp b) \top b \quad \ldots (1)$$

Diğer taraftan kabulden dolayı

$$(a \top b) \perp (a \top b) = a \top b \quad \ldots (2)$$

dir. O halde, (1) ve (2) nin sağ tarafları eşittir.

Ayrıca (R,T) bir grup olup sadeleştirme yapılabilir.

$$\Rightarrow \cancel{a}T(b\perp a)T(a\perp b)T\cancel{b} = \cancel{a}T\cancel{b}$$

$$\Rightarrow (b\perp a)T(a\perp b) = e$$

$$\Rightarrow a\perp b = (b\perp a)^{-1} = b\perp a$$

((i)de $a^{-1}=a$ olarak bulmuştuk)

$$\Rightarrow a\perp b = b\perp a \,,\ \forall a,b\in R.$$

Soru: $A=\{a-b\sqrt{3} : a,b\in \mathbb{Q}\}$ kümesinin toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cisminin bir alt cismi olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\underline{A\neq\emptyset}$: $a=b=0$ için $0\in A$ olup $A\neq\emptyset$ dir.

$\underline{A\subset\mathbb{R}}$: $\forall a-b\sqrt{3}\in A$ için $a-b\sqrt{3}\in\mathbb{R}$ olup $A\subset\mathbb{R}$ dir.

$(A,+)$ ikilisi değişmeli grup mudur?

$\forall\, a_1 - b_1\sqrt{3},\ a_2 - b_2\sqrt{3} \in A$ alalım.

$$(a_1 - b_1\sqrt{3}) + (a_2 - b_2\sqrt{3})^{-1} = (a_1 - b_1\sqrt{3}) - (a_2 - b_2\sqrt{3})$$

$$= \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}.$$

$\Rightarrow (A,+)$ ikilisi $(\mathbb{R},+)$ grubunun bir alt grubu olup gruptur. $(\mathbb{R},+)$ değişmeli grup olduğundan $(A,+)$ grubu da değişme özelliğine sahip olup değişmeli gruptur.

"$\cdot$" işleminin birleşme, değişme ve "+" işlemi üzerine dağılma özelliği $\mathbb{R}$ de mevcut olup $A \subset \mathbb{R}$ olduğundan bu özellikler A da da mevcuttur.

$\mathbb{R}$ nin "." işleminin birim elemanı 1 olup

$1 = 1 - 0.\sqrt{3}$ olarak yazılabileceğinden A kümesinde

"." işleminin birim elemanı da 1 dir.

Son olarak A kümesindeki "+" işleminin birim elemanı olan sıfırdan farklı her elemanın "." işlemine göre tersinin mevcut olduğunu göstermeliyiz.

$\forall a - b\sqrt{3} \in A$, $a - b\sqrt{3} \neq 0$, alalım.

$$(a - b\sqrt{3}).x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a - b\sqrt{3}}_{(a+b\sqrt{3})} = \frac{a + b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2-3b^2} - \frac{b}{3b^2-a^2}\sqrt{3}$$

$a - b\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \neq b \Rightarrow a^2 - 3b^2 \neq 0$

$(a^2 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \Leftrightarrow a = \mp\sqrt{3}\,b \notin \mathbb{Q})$

$\Rightarrow x = \underbrace{\frac{a}{a^2-3b^2}}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{b}{3b^2-a^2}}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \in A$ olup $a-b\sqrt{3}$ ün çarpma işlemine göre tersidir.

Not: . T işlemi A kümesi üzerinde değişme özelliğine sahip ise birim eleman e olmak üzere $\forall a \in x$ için

$$aTx = e \text{ veya } xTa = e$$

oluyorsa $x = a^{-1}$ yazılabilir.

. T işlemi A kümesi üzerinde değişme özelliğine sahip ise $\forall a \in A$ için

$$aTe = a \text{ veya } eTa = a$$

oluyorsa e birim elemandır.

$\therefore$ $(A, +, \cdot)$ bir cisim olup $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cisminin alt cismidir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite6

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"