UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite5

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Dağılma: $2k_1, 2k_2, 2k_3 \in \mathbb{Z}_4$ için

$$(2k_1)(2k_2+2k_3) = (2k_1)(2k_2) + (2k_1)(2k_3)$$

$$(2k_1+2k_2)(2k_3) = (2k_1)(2k_3) + (2k_2)(2k_3)$$

müdür?

$$(2k_1)(2k_2+2k_3) = 4k_1k_2 + 4k_1k_3 = (2k_1)(2k_2) + (2k_1)(2k_3)$$

$$(2k_1+2k_2)(2k_3) = 4k_1k_3 + 4k_2k_3 = (2k_1)(2k_3) + (2k_2)(2k_3)$$

$\Rightarrow$ Dağılma özelliği vardır.

$\therefore (\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

Alt Halka

Tanım: $(R, T, \perp)$ bir halka olsun. $S \subset R$, $S \neq \emptyset$ alt kümesi için $(S, T, \perp)$ bir halka ise bu halkaya $(R, T, \perp)$ halkasının alt halkası denir.

Teorem: $(R, T, \perp)$ bir halka olsun. $S \subset R$, $S \neq \emptyset$ olmak üzere $(S, T, \perp)$, $(R, T, \perp)$ nin bir alt halkasıdır $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in S$ için

i) y nin T işlemine göre tersi y^{-1} olmak üzere $x T y^{-1} \in S$

ii) $x \perp y \in S$

özellikleri sağlanır.

İspat: ($\Leftarrow$) (i) ve (ii) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $(S, T, \perp)$ nin bir alt halka olduğunu gösterelim. Bunun için $(S, T, \perp)$ nin kendi başına bir halka olduğunu göstermeliyiz.

(S, T) değişmeli gruptur: $\forall x, y \in S$ için (i) nolu şarttan dolayı (S, T), (R, T) grubunun bir alt grubu olup kendi başına bir gruptur. R bir halka olduğundan

(R, T) ikilisi bir değişmeli gruptur. $S \subset R$ olup (S, T) de de değişme özelliği vardır. O halde, (S, T) ikilisi değişmeli gruptur.

Şimdi $\perp$ işleminin sağlaması gereken özelliklere bakalım:

. (ii) şartından dolayı $\perp$ işlemi S de kapalı, yani bir iç işlemdir.

. $(R, T, \perp)$ bir halka olup $\perp$ işleminin birleşme özelliği vardır. $S \subset R$ olup $\perp$ işlemi S de de birleşimlidir.

. Yine $(R, T, \perp)$ halka olup $\perp$ işleminin T işlemi üzerine dağılma özelliği $S \subset R$ olduğundan S de de geçerlidir.

$\therefore$ $(S, T, \perp)$ bir halka olup $(R, T, \perp)$ halkasının bir alt halkasıdır.

$(\Rightarrow)$ Açıktır.

Teorem: $(R, T, \perp)$ halkasında T işleminin birim elemanı e ise $\forall x \in R$ için $x \perp e = e \perp x = e$ dir.

İspat: $(R, T, \perp)$ bir halka ve T işleminin birim elemanı e olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\underbrace{x \perp e = x \perp (e T e)}_{\text{(Birim eleman özelliği)}} \underbrace{= (x \perp e) T (x \perp e)}_{\text{(Dağılma özelliği)}}$$

$\Rightarrow$ $x \perp e$ idempotent, yani karesi kendisine eşit olan bir elemandır. (R, T) ikilisi değişmeli bir grup ve $x \perp e$ idempotent eleman olup $x \perp e = e$ olmalıdır.

$e \perp x = e$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem: $(R, T, \perp)$ halkasında $x, y \in R$ nin T işlemine göre tersleri, sırasıyla, x^{-1}, y^{-1} olmak üzere

$$x \perp y^{-1} = x^{-1} \perp y = (x \perp y)^{-1}$$

dir.

İspat: $(R, T, \perp)$ bir halka ve T işleminin birimi e olsun. $\forall x, y \in R$ alalım. x ve y nin T işlemine göre tersleri, sırasıyla, x^{-1} ve y^{-1} olsun.

$x T x^{-1} = e$. Her iki tarafı sağdan y ile $\perp$ işlemi ile işlersek

$$(x T x^{-1}) \perp y = \underbrace{e \perp y}_{e} \overset{(\text{Dağılma})}{\Rightarrow} (x \perp y) T (x^{-1} \perp y) = e \quad \ldots (1)$$

(R, T) değişmeli grup olup $(x^{-1} \perp y) T (x \perp y) = e \quad \ldots (2)$

elde edilir. (1) ve (2) den

$$(x \perp y)^{-1} = (x^{-1} \perp y) \quad \ldots (3)$$

bulunur. Diğer yandan

$$y T y^{-1} = e \Rightarrow x \perp (y T y^{-1}) = \underbrace{x \perp e}_{e} \overset{(\text{Dağılma})}{\Rightarrow} (x \perp y) T (x \perp y^{-1}) = e \quad \ldots (4)$$

olup (R, T) grubunun değişme özelliğinden

$$(x \perp y^{-1}) T (x \perp y) = e \quad \ldots (5)$$

bulunur. (4) ve (5) ten

$$(x \perp y)^{-1} = (x \perp y^{-1}) \quad \ldots (6)$$

elde edilir. (3) ve (6) dan

$$(x^{-1} \perp y) = (x \perp y^{-1}) = (x \perp y)^{-1}$$

bulunur.

Teorem: $(R, T, \perp)$ halkasında $x, y \in R$ nin T işlemine göre tersleri, sırasıyla, x^{-1}, y^{-1} ise $x^{-1} \perp y^{-1} = x \perp y$ dir.

İspat: $(R, T, \perp)$ bir halka, $x, y \in R$ nin T işlemine göre tersleri, sırasıyla, x^{-1}, y^{-1} olsun. Bir önceki teoremden

$$x^{-1} \perp y = x \perp y^{-1} = (x \perp y)^{-1}$$

olduğunu biliyoruz. İlk eşitlikte y yerine y^{-1} yazarsa

$$x^{-1} \perp y^{-1} = x \perp (y^{-1})^{-1} \Rightarrow x^{-1} \perp y^{-1} = x \perp y$$

elde edilir.

Örnek: $(R,+,.)$ bir halka ve $a\in R$ olsun. "+" işleminin birimi "0" ve $I_a=\{x\in R:\ ax=0\}$ olmak üzere $(I_a,+,.)$ üçlüsü R nin bir alt halkası mıdır?

Çözüm:

$I_a\neq\emptyset$: $0\in R$ için $a0=a(0+0)=a0+a0 \Rightarrow a0=0$
(Dağılma özelliği)

$\Rightarrow 0\in I_a \Rightarrow I_a\neq\emptyset$

$I_a\subset R$: $\forall x\in I_a$ için $x\in R$ olup $I_a\subset R$ dir.

$\forall x,y\in I_a$ için $x+y^{-1}\in I_a$ mı?

$\forall x,y\in I_a \Rightarrow ax=0,\ ay=0$

$ay^{-1}=(ay)^{-1}=0^{-1}=0 \Rightarrow y^{-1}\in I_a$

$a(x+y^{-1}) = \underbrace{ax}_{0} + \underbrace{ay^{-1}}_{0} = 0+0=0 \Rightarrow x+y^{-1} \in I_a.$

(Dağılma)

$\forall x,y \in I_a$ için $xy \in I_a$ mı?:

$a(xy) = (ax)y = 0y = 0 \Rightarrow xy \in I_a$

$\therefore (I_a,+,\cdot)$ üçlüsü $(R,+,\cdot)$ halkasının bir alt halkasıdır.

Cisim

Tanım: $(F,\top,\perp)$ birimli ve değişmeli bir halka olsun. ($\top$ ve $\perp$ işlemlerinin birimi farklı olmalı) F nin $\top$ işlemine göre birim elemanından farklı her elemanının $\perp$ işlemine göre tersi varsa $(F,\top,\perp)$ üçlüsüne cisim denir.

Örnek: Rasyonel sayılar kümesi, reel sayılar kümesi ve karmaşık sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte birer cisimdir.

Örnek: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ birimli ve değişimli bir halkadır. Fakat cisim değildir. Çünkü, $2\in\mathbb{Z}$ nin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ dir.

Not: $(F,\top,\perp)$ bir cisim ve $\top$ işleminin birim elemanı e ise $F^*=F-\{e\}$ olmak üzere $(F^*,\perp)$ ikilisi bir değişmeli gruptur.

Teorem: $(F,\top,\perp)$ bir cisim olsun. Aşağıdaki özellikler vardır.

i) $\top$ işleminin birim elemanı e ve $F^*=F-\{e\}$ olmak üzere $\forall x\in F^*$ için $x\perp\theta=\theta\perp x=x$ olacak şekilde bir tek $\theta\in F^*$ vardır.

ii) $a \neq e$ olmak üzere $\forall a, b \in F$ için $a \perp x = b$ denklemini sağlayan bir tek $x \in F$ vardır.

iii) $a \perp b = e$ ise $a = e$ veya $b = e$ dir.

İspat: $(F, \top, \perp)$ bir cisim, $\top$ işleminin birim elemanı e ve $F^* = F - \{e\}$ olsun.

i) $(F^*, \perp)$ ikilisi değişmeli grup olup birim eleman $x \perp \theta = \theta \perp x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in F^*$ vardır.

özelliğini sağlar. Yani, $\forall x \in F^*$ için

ii) $a \neq e$ olmak üzere $a, b \in F$ için $a \perp x = b$ olduğunu kabul edelim. F bir cisim ve $a \neq e$ olduğundan a nın $\perp$ işlemine göre tersi olan bir $a' \in F$ mevcuttur. $a \perp x = b$ denkleminin her iki tarafını soldan a' ile işlersek

$$a' \perp (a \perp x) = a' \perp b \Rightarrow (a' \perp a) \perp x = a' \perp b$$

($\perp$ nın birleşme özelliği)

$$\Rightarrow \theta \perp x = a' \perp b \Rightarrow x = a' \perp b \in F$$

($\perp$ nın birim eleman özelliği)

elde edilir. Şimdi de $a \perp x = b$ denklemini sağlayan bu x in tek olduğunu gösterelim.

$a \perp x_1 = b$ ve $a \perp x_2 = b$ olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow a \perp x_1 = a \perp x_2 \Rightarrow a' \perp (a \perp x_1) = a' \perp (a \perp x_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a' \perp a)}_{\theta} \perp x_1 = \underbrace{(a' \perp a)}_{\theta} \perp x_2 \Rightarrow \theta \perp x_1 = \theta \perp x_2$$

($\perp$ nın birleşme özelliği)

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x \text{ tektir.}$$

iii) $a \perp b = e$ olduğunu kabul edelim. $a=e$ ise ispat tamamlanmış olur. $a \neq e$ ise a nın $\perp$ işlemine göre a' tersi vardır.

$$\Rightarrow a' \perp (a \perp b) = a' \perp e \Rightarrow (a' \perp a) \perp b = a' \perp e$$

($\perp$ nın birleşme özelliği)

$$\Rightarrow \theta \perp b = e \Rightarrow b = e.$$

Örnek: Reel sayılar kümesinin toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte cisim olduğunu biliyoruz.

Toplama işleminin birim elemanı 0

Çarpma " " " " 1

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}^*$ için

$$x.1 = 1.x = x \quad (x \perp \theta = \theta \perp x = x)$$

$0.x = x.0 = 0 \quad (x \perp e = e \perp x = e)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ nin toplama işlemine göre tersi $x^{-1} = -x$ dir.

2 nin toplamaya göre tersi $2^{-1} = -2$ dir. Çünkü

$2 + (-2) = -2 + 2 = 0$ dır. $(x \top x^{-1} = x^{-1} \top x = e)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ ın çarpma işlemine göre tersi $x' = \frac{1}{x}$ dir.

$x . \frac{1}{x} = \frac{1}{x} . x = 1 \quad (x \perp x' = x' \perp x = \theta)$

2 nin çarpma işlemine göre tersi $2' = \frac{1}{2}$ dir.

$2 . \frac{1}{2} = \frac{1}{2} . 2 = 1$

Not: Her cisim bir halka olduğundan halkalar için geçerli olan özellikler cisimler için de geçerlidir.

Bir halkada x ve y elemanlarının birinci işleme göre tersleri x^{-1}, y^{-1} olmak üzere

$$x^{-1} \perp y = x \perp y^{-1} = (x \perp y)^{-1}$$

olduğunu biliyoruz. $x=2$ ve $y=3$ için $x^{-1}=-2$, $y^{-1}=-3$ tür.

$$2^{-1}.3 = 2.3^{-1} = (2.3)^{-1} \Rightarrow (-2).3 = 2.(-3) = -6 = 6^{-1}$$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $a.b=0 \Rightarrow a=0$ veya $b=0$ dır.

$(a \perp b = e \Rightarrow a=e$ veya $b=e)$

$a \neq 0$ için $ax=b \Rightarrow x = a^{-1}b = \frac{1}{a}.b$ olup tektir.

$a=2$, $b=3$ için $2x=3 \Rightarrow x = 2^{-1}.3 = \frac{1}{2}.3 = \frac{3}{2}$ dır.

Tanım: $(F, T, \perp)$ bir cisim ve $S \neq \emptyset$, $S \subset F$ olsun. $(S, T, \perp)$ bir cisim ise $(S, T, \perp)$ ye $(F, T, \perp)$ cisminin bir alt cismi denir.

Örnek: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar cismi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cisminin bir alt cismidir.

Tanım: $(F, T, \perp)$ bir cisim, T işleminin birim elemanı e, $\perp$ işleminin birim elemanı θ olsun.

$$\underbrace{\theta \, T \, \theta \, T \dots T \, \theta}_{n \text{ tane}} = e$$

olacak şekildeki en küçük pozitif n tam sayısına cismin karakteristiği denir. Eğer böyle bir n sayısı yok ise cismin karakteristiği sıfır kabul edilir.

Örnek: $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cisminde toplama ve çarpma işlemlerinin birim elemanları, sırasıyla, 0 ve 1 dir.

$$1+1+\cdots+1 \neq 0$$

olduğundan bu cismin karakteristiği sıfırdır.

Teorem: Bir cismin karakteristiği sıfır değilse bir asal sayıdır.

İspat: $(F,T,\perp)$ karakteristiği $p\neq 0$ olan bir cisim olmak üzere T ve $\perp$ işlemlerinin birim elemanları, sırasıyla, e ve θ olsun. p nin asal olmadığını kabul edelim

$$\Rightarrow \underbrace{\theta T \theta T \ldots T \theta}_{p \text{ tane}} = e \quad \text{yazılabilir.}$$

p asal olmadığından $q\neq p\neq r$ olmak üzere $p=q\cdot r$ şeklinde yazılabilir.

$\underbrace{\theta \top \theta \top \dots \top \theta}_{p \text{ tane}} = p\theta$ yazılışını kullanırsak

$p\theta = e \Rightarrow (qr)\theta = (q\theta) \perp (r\theta) = e \Rightarrow q\theta = e$ veya $r\theta = e$
(ödev)

$\Rightarrow$ cismin karakteristiği q veya r olup p nin cismin karakteristiği olması ile çelişir.

O halde, p nin asal olmadığı kabulü yanlış olup p bir asal sayıdır. Yani, cismin karakteristiği sıfır değilse asal sayı olmak zorundadır.

Örnek: $F = \{0,1\}$ kümesi üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri

$1+1=0$, $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1\cdot1=1$, $0\cdot0=0$, $0\cdot1=1\cdot0=0$

şeklinde tanımlanırsa $(F,+,\cdot)$ üçlüsü bir cisim olur (ödev). Bu cismin "$+$" ve "$\cdot$" işlemlerinin birim elemanları, sırasıyla, 0 ve 1 olup $1+1=0$ olduğundan karakteristik 2 dir

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite5

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"