ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite4

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Uygulama

Soru: $G=\{3^x : x\in\mathbb{Z}\}$ ve $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ için $3^x * 3^y = 3^{x+y}$ olduğuna göre $(G,*)$ ikilisinin grup olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

1) **$G\neq\emptyset$:** $0\in\mathbb{Z}$ için $3^0\in G$ olup $G\neq\emptyset$ dir.

2) **Kapalılık:** $\forall\, 3^x, 3^y\in G$ için $3^x * 3^y\in G$ midir?

$3^x * 3^y = 3^{x+y}$ dir. $3^x, 3^y\in G$ olduğundan $x,y\in\mathbb{Z}$ olup $x+y\in\mathbb{Z}$ dir. O halde, $3^{x+y}\in G$ olup $*$ işlemi G de kapalıdır.

3) **Birleşme:** $\forall\, 3^x, 3^y, 3^z\in G$ için $3^x*(3^y*3^z)=(3^x*3^y)*3^z$ midir?

$3^x*(3^y*3^z)=3^x*3^{y+z}=3^{x+(y+z)}$
$(3^x*3^y)*3^z=3^{x+y}*3^z=3^{(x+y)+z}$

$\mathbb{Z}$ de toplama işlemi birleşme özelliğine sahip olup $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir. O halde, $3^{x+(y+z)}=3^{(x+y)+z}$ olup birleşme özelliği sağlanır.

Birim eleman: $\forall\, 3^x\in G$ için $3^x*e=e*3^x=3^x$ olacak şekilde $e\in G$ var mı?

$3^x*e=3^x \Leftrightarrow 3^x*3^a=3^x \Leftrightarrow 3^{x+a}=3^x \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow e=3^0$

$e*3^x=3^x \Leftrightarrow 3^a*3^x=3^x \Leftrightarrow 3^{a+x}=3^x \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow e=3^0$

O halde, $e=3^0\in G$ birim elemandır.

Ters eleman: $\forall\, 3^x\in G$ için $3^x*(3^x)^{-1}=(3^x)^{-1}*3^x=3^0$ olacak şekilde $(3^x)^{-1}\in G$ var mı?

$$\underbrace{3^x * (3^x)^{-1}}_{} = 3^0 \Leftrightarrow 3^x * 3^y = 3^0 \Leftrightarrow 3^{x+y} = 3^0 \Leftrightarrow x+y=0$$

where $(3^x)^{-1} = 3^y$:

$$\Leftrightarrow y = -x$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^{-1} = 3^{-x}$$

$$\underbrace{(3^x)^{-1}}_{3^y} * 3^x = 3^0 \Leftrightarrow 3^y * 3^x = 3^0 \Leftrightarrow 3^{y+x} = 3^0 \Leftrightarrow y+x=0$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^{-1} = 3^{-x}$$

O halde, $\forall 3^x \in G$ için $3^{-x} \in G$, 3^x in tersidir.

$\therefore$ $(G,*)$ ikilisi bir gruptur.

Not: $\forall 3^x, 3^y \in G$ için $3^x * 3^y = 3^{x+y} = 3^{y+x} = 3^y * 3^x$ olup

$(G,*)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Soru: $(G,\cdot)$ ikilisi değişmeli grup ve bu grubun birim elemanı e olmak üzere $H=\{x\in G : x^2=e\}$ kümesinin G nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $H\neq\emptyset$, $H\subset G$ ve $\forall x,y\in H$ için $xy\in H$ ve $y^{-1}\in H$ olduğunu göstermeliyiz.

$H\neq\emptyset$: $e\in G$ için $e^2=e$ olup $e\in H$ dır. O halde, $H\neq\emptyset$ dır.

$H\subset G$ mi?: $\forall x\in H$ için $x\in G$ olup $H\subset G$ dir.

Kapalılık: $\forall x,y\in H$ alalım. Bu durumda $x^2=e$, $y^2=e$ dir.

$$xy\in H \Leftrightarrow (xy)^2\in H \Leftrightarrow (xy)(xy)=x(yy)x=xy^2x=xex$$

(Birleşme ve değişme özelliği)

$$=xx=x^2=e$$

O halde, $(H,\cdot)$ kapalılık özelliğini sağlar.

Ters eleman: $\forall x \in H$ alalım. $x^{-1} \in H$ mı?

$x \in H \Rightarrow x^2 = e$

$x^{-1}x^{-1} = (xx)^{-1} = (x^2)^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow x^{-1} \in H \Rightarrow$ Ters eleman özelliği sağlanır.

$\therefore$ H, G nin alt grubudur.

Ödev: Kapalılık ve ters eleman özelliği yerine $\forall x,y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall x,y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ olduğunu gösteriniz.

Ödev: $(G,.)$ bir grup ve $a \in G$ olsun. $H = \{x \in G : xa = ax\}$ olmak üzere H kümesinin G nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

Soru: $(A, \circ)$ ikilisi bir grup olsun. $a, b \in A$ olmak üzere $a \circ x = b$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a, b \in A$ için $a \circ x = b$ olsun. Bu denklemi sağlayan sadece bir tane $x \in A$ olduğunu göstereceğiz.

$a \in A$ ve A grup $\Rightarrow a^{-1} \in A$ mevcuttur.

$a \circ x = b$ eşitliğinin her iki tarafını soldan a^{-1} ile işlersek

$$a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b \overset{\text{(Birleşme)}}{\Longrightarrow} \underbrace{(a^{-1} \circ a)}_{e} \circ x = a^{-1} \circ b \Rightarrow e \circ x = a^{-1} \circ b$$

$$\Rightarrow x = a^{-1} \circ b$$

olarak bulunur. $a^{-1}, b \in A$ ve A bir grup olup $x = a^{-1} \circ b \in A$, $a \circ x = b$ denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi bu çözümün tek olduğunu gösterelim. $a \circ x = b$ denkleminin x_1 ve x_2 gibi iki çözümünün olduğunu kabul edelim. Yani, $a \circ x_1 = b$ ve $a \circ x_2 = b$ olsun.

$$\Rightarrow a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow a^{-1} \circ (a \circ x_1) = a^{-1} \circ (a \circ x_2)$$

$$\Rightarrow (\underbrace{a^{-1} \circ a}_{e}) \circ x_1 = (\underbrace{a^{-1} \circ a}_{e}) \circ x_2 \Rightarrow e \circ x_1 = e \circ x_2$$

(Birleşme)

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

(Birim eleman)

$\therefore$ $a \circ x = b$ denkleminin bir grupta tek çözümü vardır.

Soru: Çift tam sayılar kümesinin toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir halka olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Çift tam sayılar kümesini $\mathbb{Z}_Ç$ ile gösterirsek

$$\mathbb{Z}_Ç = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde yazılabilir. Öncelikle $(\mathbb{Z}_Ç, +)$ ikilisinin değişmeli grup olduğunu gösterelim:

$(\mathbb{Z}_Ç, +)$ değişmeli gruptur:

$(\mathbb{Z}_Ç, +) \neq \emptyset$: $2 \in \mathbb{Z}_Ç \Rightarrow \mathbb{Z}_Ç \neq \emptyset$

Kapalılık: $\forall\, 2k_1, 2k_2 \in \mathbb{Z}_Ç$ alalım.

$$2k_1 + 2k_2 = 2\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_Ç$$ olup $(\mathbb{Z}_Ç, +)$ kapalılık özelliğini sağlar.

Birleşme: $(\mathbb{Z},+)$ birleşme özelliğine sahip olup $(\mathbb{Z}_{\zeta},+)$ da da bu özellik vardır.

Birim eleman: $2k+0=0+2k=2k$ ve $2.0=0\in\mathbb{Z}_{\zeta}$ olup 0 $(\mathbb{Z}_{\zeta},+)$ ikilisinin birim elemanıdır.

Ters eleman: $2k+(2k)^{-1}=(2k)^{-1}+2k=0$ olacak şekilde $(2k)^{-1}\in\mathbb{Z}_{\zeta}$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} 2k+(2k)^{-1}=0 \Rightarrow (2k)^{-1}=-2k=2\underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}_{\zeta} \\ (2k)^{-1}+2k=0 \Rightarrow (2k)^{-1}=-2k=2\underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}_{\zeta} \end{array}\right\} \begin{array}{l}(2k)^{-1}=2k \text{ olup} \\ \text{ters eleman özelliği sağlanır.}\end{array}$$

Değişme: $\forall\, 2k_1, 2k_2\in\mathbb{Z}_{\zeta}$ için

$$2k_1+2k_2=2k_2+2k_1$$

olup değişme özelliği sağlanır.

O halde, $(\mathbb{Z}_4, +)$ ikilisi değişmeli (Abel) gruptur.

Şimdi de çarpma işleminin sağlaması gereken özelliklere bakalım:

<u>Kapalılık:</u> $\forall\, 2k_1, 2k_2 \in \mathbb{Z}_4$ için $(2k_1)(2k_2) \in \mathbb{Z}_4$ mi?

$2k_1, 2k_2 \in \mathbb{Z}$ olup $\mathbb{Z}$ de çarpma işleminin değişme özelliğinden dolayı

$$(2k_1)(2k_2) = 2(\underbrace{2k_1k_2}_{\in \mathbb{Z}}) \in \mathbb{Z}_4$$

elde edilir. O halde, çarpma işlemi $\mathbb{Z}_4$ de kapalıdır.

<u>Birleşme:</u> $2k_1, 2k_2, 2k_3 \in \mathbb{Z}_4$ için $[(2k_1)(2k_2)]2k_3) = (2k_1)[(2k_2)(2k_3)]$ müdür?

$$\left.\begin{aligned} [(2k_1)(2k_2)](2k_3) &= 8k_1k_2k_3 \\ (2k_1)[(2k_2)(2k_3)] &= 8k_1k_2k_3 \end{aligned}\right\} \text{Birleşme özelliği vardır.}$$

Dağılma: $2k_1, 2k_2, 2k_3 \in \mathbb{Z}_4$ için

$$(2k_1)(2k_2+2k_3) = (2k_1)(2k_2) + (2k_1)(2k_3)$$

$$(2k_1+2k_2)(2k_3) = (2k_1)(2k_3) + (2k_2)(2k_3)$$

müdür?

$$(2k_1)(2k_2+2k_3) = 4k_1k_2 + 4k_1k_3 = (2k_1)(2k_2) + (2k_1)(2k_3)$$

$$(2k_1+2k_2)(2k_3) = 4k_1k_3 + 4k_2k_3 = (2k_1)(2k_3) + (2k_2)(2k_3)$$

$\Rightarrow$ Dağılma özelliği vardır.

$\therefore (\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

Alt Halka

Tanım: $(R, T, \perp)$ bir halka olsun. $S \subset R$, $S \neq \emptyset$ alt kümesi için $(S, T, \perp)$ bir halka ise bu halkaya $(R, T, \perp)$ halkasının alt halkası denir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite4

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"