ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite3

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Alt grup: (G,T) bir grup olsun. $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ olmak üzere (H,T) ikilisi bir grup ise H ye G nin alt grubu denir.

Örnek: $(\mathbb{Z},+)$ ikilisi $(\mathbb{R},+)$ grubunun bir alt grubudur.

Örnek: (G,T) bir grup olsun. G nin T ye göre birim elemanı e ise $(\{e\},T)$ ikilisi G nin bir alt grubudur.

Örnek: Her grup kendisinin alt grubudur.

Tanım: (G,T) bir grup olmak üzere (G,T) ve $(\{e\},T)$ alt gruplarına G nin aşikar alt grupları denir.

G nin aşikar alt gruplarından başka bir alt grubu varsa bu alt gruba G nin öz alt grubu denir.

Örnek: $\mathbb{Q}^+$ pozitif rasyonel sayılar kümesini göstersin. $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ikilisi $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ grubunun bir öz alt grubudur.

Teorem: (H, T) grubu, (G, T) grubunun bir alt grubu olsun.

i) H ve G nin T işlemine göre birim elemanı aynıdır.

ii) H deki bir elemanın tersi bu elemanın G grubundaki tersine eşittir.

İspat:

i) H ve G nin T işlemine göre birimi, sırasıyla, e_1 ve e_2 olsun. $e_1 = e_2$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall x \in G$ için $xTe_2 = e_2Tx = x$ dir. $x = e_1$ için de bu eşitlik geçerlidir.

$$\Rightarrow e_1 T e_2 = e_1 \quad \ldots (1)$$

$e_1 T e_1 = e_1 \ldots (2)$

(1) ve (2) den

$$e_1 T e_2 = e_1 T e_1$$

Eşitliğin her iki tarafından e_1 i sadeleştirirse

$\Rightarrow \quad e_2 = e_1$

elde edilir

ii) $\forall x \in H$ alalım. x in H deki tersi x_1, G deki tersi x_2 olsun. $x_1 = x_2$ olduğunu göstereceğiz.

$$\underset{\text{(Ters eleman öz.)}}{x_1 = x_1 T e = x_1 T (x T x_2)} = \underset{\text{(Birleşme öz.)}}{(x_1 T x) T x_2} = \underset{\text{(Ters eleman öz.)}}{e T x_2} = \underset{\text{(Birim eleman öz.)}}{x_2}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ olup H deki ve G deki tersler eşittir.

Teorem: (G,T) bir grup ve $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ olsun. (H,T) ikilisinin (G,T) nin bir alt grubu olması için gerek yeter şart aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır.

i) $\forall x, y \in H$ için $xTy \in H$,

ii) $\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ Açık.

$(\Leftarrow)$ (G,T) bir grup, $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ olsun. (i) ve (ii) özelliklerinin sağlandığını kabul edelim. (H,T) ikilisinin bir alt grup olduğunu göstereceğiz. Bunun için (H,T) ikilisinin bir grup olduğunu göstermeliyiz.

Kapalılık: i) den dolayı T işlemi H de kapalıdır.

Birleşme: (G,T) bir grup olup birleşme özelliği vardır. $H\subset G$ olduğundan H de birleşme özelliğine sahiptir.

Ters eleman: ii) den dolayı $\forall x\in H$ için $x^{-1}\in H$ dır.

Birim eleman: $\forall x\in H$ alalım. ii) den dolayı $x^{-1}\in H$ dır.
i) den dolayı $xTx^{-1}\in H$ dır.

$$\Rightarrow xTx^{-1}=e\in H$$

$\therefore$ (i) ve (ii) özelliklerini sağlayan $H\subset G$, $H\neq\emptyset$ kümesi için (H,T) ikilisi bir grup olup (G,T) nin alt grubudur.

Teorem: (G,T) bir grup, $H\subset G$ ve $H\neq\emptyset$ olsun.
(H,T) nin bir altgrup olması için gerek ve yeter şart $\forall x,y\in H$ için $xTy^{-1}\in H$ olmasıdır.

İspatı: ($\Rightarrow$) (H,T) ikilisi (G,T) grubunun bir alt grubu olsun. $\forall x,y \in H$ alalım. (H,T) bir alt grup olup kendi başına bir gruptur. $y \in H$ için ters eleman özelliğinden $y^{-1} \in H$ dır. Kapalılık özelliğinden $x, y^{-1} \in H$ için $xTy^{-1} \in H$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\forall x,y \in H$ için $xTy^{-1} \in H$ olduğunu kabul edelim. $H \neq \emptyset$ olup $\exists x \in H$ vardır. Kabulden dolayı $xTx^{-1} \in H$, yani, $e \in H$ olup birim eleman özelliği sağlanır. $H \subset G$ ve (G,T) grup olduğundan (H,T) ikilisi birleşme özelliğine sahiptir. $e, x \in H$ için kabulden dolayı $eTx^{-1} \in H$, yani, $x^{-1} \in H$ olup ters eleman özelliği sağlanır.

$\forall x,y \in H$ alalım. Ters eleman özelliğinden $y^{-1} \in H$ dır. Kabulü $x, y^{-1} \in H$ için uygularsak $xT(y^{-1})^{-1} = xTy \in H$ olup kapalılık özelliği sağlanır. O halde, (H,T) bir grup olup (G,T) grubunun alt grubudur.

Teorem: (G,T) bir grup ve $K,H \subset G$ olmak üzere (H,T) ve (K,T), G nin alt grupları olsun. Bu durumda $(H\cap K,T)$ ikilisi de G nin bir alt grubudur.

İspat: Bir önceki teoremi kullanırsak $H\cap K$ nın alt grup olduğunu göstermek için $\forall x,y \in H\cap K$ için $xTy^{-1} \in H\cap K$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$H\cap K \neq \emptyset$: H ve K alt grup olup $e \in H,K$ olacağından $e \in H\cap K$ dır. O halde, $H\cap K \neq \emptyset$. dir.

$\forall x,y \in H\cap K$ alalım.

$x,y \in H\cap K \Rightarrow x,y \in H,K \Rightarrow$ H,K alt grup olup

$xTy^{-1} \in H, K \Rightarrow xTy^{-1} \in H \cap K$

$\therefore$ $H \cap K$, G nin bir alt grubudur.

Not: I bir indis kümesi olmak üzere $i \in I$ için H_i ler G nin alt grubu ise $\bigcap_{i \in I} H_i$ kümesi de G nin bir alt grubudur.

Not: (G,T) bir grup, H ve K, G nin alt grupları ise $H \cup K$ nın alt grup olması gerekmez. $H \cup K$ nın alt grup olması için $H \subset K$ veya $K \subset H$ olmalıdır.

Örnek: $H = \{a+bi : a^2+b^2=1\}$ ve $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere $(H, .)$ ikilisi $(\mathbb{C}^*, .)$ grubunun alt grubudur, gösterelim:

Çözüm: $H \neq \emptyset$: $a=1$, $b=0$ olarak alınırsa $a^2+b^2=1$ olup $a=1 \in H$ dır. Yani, $H \neq \emptyset$ dır.

$\forall x, y \in H$ alalım. H nin tanımından $a_1^2+b_1^2=1$, $a_2^2+b_2^2=1$ olmak üzere $x=a_1+b_1 i$, $y=a_2+b_2 i$ şeklindedir.

$xy^{-1} \in H$ olduğunu gösterirsek $(H,.)$ ikilisi bir alt grup olur.

$$y=a_2+b_2 i \Rightarrow y^{-1}=\frac{1}{a_2+b_2 i}=\frac{a_2-b_2 i}{a_2^2+b_2^2}=a_2-b_2 i$$

$$xy^{-1}=(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i$$

$xy^{-1} \in H$ olması için $(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_2b_1-a_1b_2)^2=1$ olmalıdır

$$\begin{aligned}(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_2b_1-a_1b_2)^2 &= a_1^2a_2^2+\cancel{2a_1a_2b_1b_2}+b_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2 \\ &\quad -\cancel{2a_2b_1}a_1b_2+a_1^2b_2^2 \\ &= a_1^2(\underbrace{a_2^2+b_2^2}_{1})+b_1^2(\underbrace{b_2^2+a_2^2}_{1})=a_1^2+b_1^2=1\end{aligned}$$

$\Rightarrow xy^{-1} \in H$

$\therefore (H,\cdot)$; $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ın alt grubudur.

HALKA

Tanım: (R,T) değişmeli bir grup olsun. R üzerinde tanımlı ikinci bir işlem $\perp$ olmak üzere $\forall x,y,z \in R$ için

i) $x \perp y \in R$ (Kapalılık)

ii) $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ (Birleşme)

iii) $$\left.\begin{aligned} x \perp (y T z) &= (x \perp y) T (x \perp z) \\ (x T y) \perp z &= (x \perp z) T (y \perp z) \end{aligned}\right\} \text{(Dağılma)}$$

özellikleri sağlanırsa $(R,T,\perp)$ üçlüsüne halka denir.

Tanım: $(R,T,\perp)$ bir halka olsun. $\perp$ işlemi değişimli ise R ye değişimli halka denir.

Tanım: $(R, \top, \perp)$ bir halka olsun. R nin $\perp$ işlemine göre birim elemanı varsa R ye birimli halka denir.

Örnek: $(\mathbb{Z}, +, .)$ üçlüsü birimli ve değişimli halkadır.

$(\mathbb{Z}, +)$ nin değişmeli grup olduğunu biliyoruz. İkinci işlem olan çarpmanın özelliklerine bakalım. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ alalım.

. $xy \in \mathbb{Z}$ olup kapalılık sağlanır. Yani, "." işlemi $\mathbb{Z}$ de bir iç işlemdir.

. $x(yz) = (xy)z$ olup birleşme özelliği sağlanır.

. $x(y+z) = xy + xz$ ve $(x+y)z = xz + yz$ olup dağılma özelliği sağlanır.

$\therefore (\mathbb{Z}, +, .)$ bir halkadır.

Üstelik $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $xy = yx$ olduğundan bu halka değişimli halkadır.

$\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x.1 = 1.x = x$ olup 1 çarpma işleminin birimidir. Yani, bu halka birimli bir halkadır.

$\therefore (\mathbb{Z}, +, .)$ birimli, değişimli bir halkadır. Bu halkaya tam sayılar halkası denir.

Örnek: $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$ birimli ve değişimli halkadır.

Ödev: $R = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R$ için $(a_1, b_1) T (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ ve

$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

şeklinde iki işlem tanımlansın. $(R, T, \perp)$ nin bir halka olup olmadığını inceleyiniz.

(Dağılma sağlanmıyor. Halka değil!)

Örnek: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $a \oplus b = a+b+1$ ve $a \odot b = a+b+ab$ olmak üzere $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ üçlüsünün bir halka olduğunu gösterelim.

Çözüm: Öncelikle $(\mathbb{Z}, \oplus)$ ikilisinin değişmeli grup olduğunu gösterelim: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ alalım.

Kapalılık: $a \oplus b = a+b+1 \in \mathbb{Z}$ olup kapalılık sağlanır.

Birleşme: $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b+c+1) = a+(b+c+1)+1 = a+b+c+2$

$$(a \oplus b) \oplus c = (a+b+1) \oplus c = (a+b+1)+c+1 = a+b+c+2$$

$\Rightarrow a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b \oplus c)$ olup birleşme özelliği sağlanır.

Birim eleman: $a \oplus e = e \oplus a = a$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} a \oplus e = a \Leftrightarrow a+e+1 = a \Leftrightarrow e=-1 \in \mathbb{Z} \\ e \oplus a = a \Leftrightarrow e+a+1 = a \Leftrightarrow e=-1 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} e=-1 \text{ birim elemandır.}$$

Ters eleman: $a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = -1$ olacak şekilde $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} a \oplus a^{-1} = -1 \Leftrightarrow a + a^{-1} + 1 = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = -a-2 \in \mathbb{Z} \\ a^{-1} \oplus a = -1 \Leftrightarrow a^{-1} + a + 1 = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = -a-2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

$a^{-1} = -a-2$ a nın tersidir.

Değişme: $a \oplus b = b \oplus a$ mı?

$a \oplus b = a+b+1 = b+a+1 = b \oplus a$ olup değişme özelliği vardır.

O halde, $(\mathbb{Z}, \oplus)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Şimdi de $\odot$ işleminin sağlaması gereken özellikleri inceleyelim. Öncelikle, bu işlemin iç işlem olduğunu göstermeliyiz.

$a \odot b = a+b+ab \in \mathbb{Z}$ olup $\odot$ işlemi $\mathbb{Z}$ de bir iç işlemdir.

Birleşme: $a \odot (b \odot c) = a \odot (b+c+bc) = a + (b+c+bc) + a(b+c+bc)$

$= a+b+c+bc+ab+ac+abc$

$(a \odot b) \odot c = (a+b+ab) \odot c = (a+b+ab) + c + (a+b+ab)c$

$= a+b+ab+c+ac+bc+abc$

$\Rightarrow a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ olup birleşme özelliği sağlanır.

Dağılma: i) $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

ii) $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$

özellikleri sağlanıyor mu?

i) $a \odot (b \oplus c) = a \odot (b+c+1) = a + (b+c+1) + a(b+c+1)$

$= a+b+c+1+ab+ac+a = 2a+b+c+ab+ac+1$

$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (a+b+ab) \oplus (a+c+ac) = a+b+ab+a+c+ac+1$

$= 2a+b+c+ab+ac+1$

$\Rightarrow$ i) özelliği sağlanır.

ii) $(a \oplus b) \odot c = (a+b+1) \odot c = (a+b+1)+c+(a+b+1)c$

$$= a+b+1+c+ac+bc+c = a+b+2c+ac+bc+1$$

$(a \odot c) \oplus (b \odot c) = (a+c+ac) \oplus (b+c+bc) = a+c+ac+b+c+bc+1$

$$= a+b+2c+ac+bc+1$$

$\Rightarrow$ (ii) özelliği sağlanır.

$\therefore$ $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır.

Not: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \odot b = a+b+ab = b+a+ba = b \odot a$ olup $\odot$ işlemi değişmelidir ve $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ üçlüsü değişmeli halkadır. Ayrıca birimli bir halkadır ve birimi 0 dır.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite3

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü

Lineer Cebir I "Mat 103"