UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite2

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

GRUP

Tanım: $G \neq \emptyset$ bir küme olsun. (G, T) ikilisi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu ikiliye grup denir.

1) **Kapalılık özelliği:** $\forall x, y \in G$ için $xTy \in G$ dir, yani; T işlemi G üzerinde bir iç işlemdir.

2) **Birleşme özelliği:** $\forall x, y, z \in G$ için

$$xT(yTz) = (xTy)Tz$$

dir.

3) **Birim eleman özelliği:** $\forall x \in G$ için $xTe = eTx = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

4) **Ters eleman özelliği:** $\forall x \in G$ için $xTy = yTx = e$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır.

Tanım: (G,T) ikilisi bir grup olsun. T işlemi G üzerinde değişme özelliğine sahipse, yani $\forall x,y \in G$ için $xTy = yTx$ oluyorsa G ye değişimli grup veya Abel grubu denir. (Niels Henrik Abel: 1802-1829 yılları arasında yaşamış Norveçli matematikçi).

Örnek: $(\mathbb{Z},+)$ ikilisi bir gruptur.

- $\mathbb{Z} \neq \emptyset$
- $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x+y \in \mathbb{Z}$ olup $\mathbb{Z}$ toplama işlemine göre kapalıdır. (Kapalılık özelliği)
- $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için $x+(y+z) = (x+y)+z$ olup birleşme özelliği vardır.
- $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x+0 = x$ ve $0+x = x$ olup $0 \in \mathbb{Z}$ toplama işleminin birimidir. (Birim eleman özelliği)

. $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x+y=0$ ve $y+x=0$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ var mı? (Ters eleman özelliği)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \Rightarrow y=-x \\ y+x=0 \Rightarrow y=-x \end{array}\right\}$$ $y=-x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$ nin toplama işlemine göre tersi olup ters eleman özelliği sağlanır.

$\therefore$ $(\mathbb{Z},+)$ ikilisi bir gruptur.

Ayrıca, $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x+y=y+x$ olduğundan $(\mathbb{Z},+)$ ikilisi değişmeli (Abel) gruptur.

Örnek: $\mathbb{Q}^+$ ile pozitif rasyonel sayıları gösterelim. $\forall x,y \in \mathbb{Q}^+$ için $\Delta(x,y) = x \Delta y = \frac{x\,y}{2}$ şeklinde tanımlansın. $(\mathbb{Q}^+, \Delta)$ ikilisinin bir grup olup olmadığını inceleyelim.

. $\mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$.

. <u>Kapalılık özelliği:</u> $\forall x,y \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta y \in \mathbb{Q}^+$ mı?

$\forall x,y \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta y = \frac{x y}{2} \in \mathbb{Q}^+$ olup kapalılık özelliği sağlanır.

. <u>Birleşme özelliği:</u> $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$ midir?

$\forall x,y,z \in \mathbb{Q}^+$ alalım.

$$\left.\begin{array}{l} x \Delta (y \Delta z) = x \Delta \left(\frac{y \cdot z}{2}\right) = \frac{x y z}{4} \\ (x \Delta y) \Delta z = \left(\frac{x y}{2}\right) \Delta z = \frac{x y z}{4} \end{array}\right\} \text{Birleşme özeliği sağlanır.}$$

. <u>Birim eleman özelliği:</u> $\forall x \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta e = x$ ve $e \Delta x = x$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Q}^+$ var mı?

$$x \Delta e = x \Leftrightarrow \frac{x e}{2} = x \Leftrightarrow e = 2 \in \mathbb{Q}^+$$

$e \Delta x = x \iff \frac{ex}{2} = x \iff e = 2 \in \mathbb{Q}^+$

$\forall x \in \mathbb{Q}^+$ ve $e = 2 \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta e = e \Delta x = x$ olduğundan $e = 2 \in \mathbb{Q}^+$, Δ iç işleminin birim elemanıdır.

• <u>Ters eleman özelliği:</u> $\forall x \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta y = e = 2$, $y \Delta x = e = 2$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Q}^+$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} x \Delta y = 2 \iff \frac{xy}{2} = 2 \iff y = \frac{4}{x} \in \mathbb{Q}^+ \\ y \Delta x = 2 \iff \frac{yx}{2} = 2 \iff y = \frac{4}{x} \in \mathbb{Q}^+ \end{array}\right\}$$

$\forall x \in \mathbb{Q}^+$ için $y = \frac{4}{x} \in \mathbb{Q}^+$ x in Δ işlemine göre tersidir.

$\therefore$ $(\mathbb{Q}^+, \Delta)$ ikilisi bir gruptur.

Ayrıca, $\forall x, y \in \mathbb{Q}^+$ için $x \Delta y = \frac{xy}{2} = \frac{yx}{2} = y \Delta x$ olduğundan bu grup değişmeli (Abel) gruptur.

Örnek: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + \frac{y}{2}$ olsun.

$x=2,\ y=1 \in \mathbb{Z}$ için $2 * 1 = 2 + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan

$*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde bir iç işlem değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{Z}, *)$ ikilisi grup değildir.

Örnek: $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q}^+,.)$, $(\mathbb{R}^+,.)$ ikilileri birer değişmeli gruptur.

Örnek: $(\mathbb{Z},.)$, $(\mathbb{Z}^+,+)$, $(\mathbb{Z}^+,.)$, $(\mathbb{Q},.)$, $(\mathbb{Q}^+,+)$, $(\mathbb{R},.)$, $(\mathbb{R}^+,+)$ ikilileri grup değildir. Çünkü, bu ikililer ters eleman özelliğini sağlamaz.

Teorem: (G,T) bir grup olsun.

i) G nin birim elemanı tektir,

ii) G deki her elemanın tersi vardır ve tektir,

iii) $\forall x,y,z \in G$ için $xTy = xTz \Rightarrow y = z$ ve

$yTx = zTx \Rightarrow y = z$ dir.

İspat: i ve ii iç işlem konusunda ispatlanmıştı.

iii) $\forall x, y, z \in G$ alalım.

$xTy = xTz$ olsun. (G, T) bir grup olduğundan $x \in G$ için x in tersi yani $x^{-1} \in G$ vardır. Eşitliğin her iki yanını soldan x^{-1} ile işleme tabi tutarsak

$$x^{-1}T(xTy) = x^{-1}T(xTz)$$

elde edilir. Grupta birleşme özelliği olduğundan

$$(x^{-1}Tx)Ty = (x^{-1}Tx)Tz$$

yazabiliriz. $x^{-1}Tx = e$ olduğundan

$$eTy = eTz$$

olur. Birim eleman özelliğinden $y = z$ elde edilir.

Siz de ödev olarak $yTx = zTx$ iken $y = z$ olduğunu gösteriniz.

Teorem: (G, T) bir grup, $a, b \in G$ olsun.

i) $aTx = b$

ii) $xTa = b$ denklemlerinin G de tek çözümü vardır.

İspat: (G, T) bir grup olduğundan grup özelliklerini sağlar.

i) $aTx = b \Rightarrow a^{-1}T(aTx) = a^{-1}Tb \underset{\text{(birleşme öz.)}}{\Rightarrow} (\underbrace{a^{-1}Ta}_{e})Tx = a^{-1}Tb$

$\Rightarrow x = a^{-1}Tb$

ii) Ödev.

Tanım: Bir iç işleme göre karesi kendisine eşit olan elemana idempotent eleman denir.

Teorem: Bir grupta, idempotent eleman birim elemandır.

İspat: (G,T) bir grup ve $x\in G$ idempotent eleman olsun. Bu durumda, $xTx=x$ olur. G bir grup olduğundan x in tersi $x^{-1}\in G$ vardır.

$$xTx=x \Rightarrow x^{-1}T(xTx)=x^{-1}Tx \Rightarrow (x^{-1}Tx)Tx=x^{-1}Tx$$

(Birleşme öz.)

G nin birimi e olmak üzere $\forall x\in G$ için $x^{-1}Tx=e$ ve $xTx^{-1}=e$ olacağından yukarıdaki son eşitlikten

$$eTx=e \Rightarrow x=e$$

elde edilir.

$\therefore$ Bir grupta karesi kendisine eşit olan eleman sadece birim elemandır.

Uygulama

Soru: $S=\{1,-1,-i,i\}$ kümesi üzerinde çarpma işleminin bir iç işlem olduğunu gösteriniz. Burada $i^2=-1$ dir.

Çözüm: $\forall x,y\in S$ için $xy\in S$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için bir tablo yapabiliriz.

$\cdot$	-1	1	$-i$	i
-1	1	-1	i	$-i$
1	-1	1	$-i$	i
$-i$	i	$-i$	-1	1
i	$-i$	i	1	-1

Tablodan görüleceği üzere $\forall x,y\in S$ için $xy\in S$ dir. O halde,

$$\cdot : S\times S \longrightarrow S$$
$$(x,y)\longrightarrow \cdot(x,y)=xy$$

dir. Yani, çarpma işlemi S kümesi üzerinde bir iç işlemdir.

Soru: $S=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde, aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanan "$\circ$" ve "$\square$" iç işlemlerinin özelliklerini inceleyiniz.

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\square$	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	c	b	d
c	b	d	a	c
d	c	b	d	a

<u>Çözüm:</u> İlk olarak "$\circ$" işlemini ele alalım.

<u>Birim eleman:</u> $\forall x \in S$ için $x \circ e = e \circ x = x$ olacak şekilde $e \in S$ var mı?

$$\left.\begin{aligned} a \circ a &= a \\ a \circ b = b \circ a &= b \\ a \circ c = c \circ a &= c \\ a \circ d = d \circ a &= d \end{aligned}\right\} \quad a; \text{ "}\circ\text{" işleminin birim elemanıdır.}$$

<u>Birleşme özelliği:</u> $\forall x, y, z \in S$ için $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ midir?

$$\left.\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= a \circ d = d \\ (a \circ b) \circ c &= b \circ c = d \end{aligned}\right\} \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

$$\left.\begin{array}{l} a\circ(b\circ d)=a\circ a=a \\ (a\circ b)\circ d=b\circ d=a \end{array}\right\} a\circ(b\circ d)=(a\circ b)\circ d$$

$$\left.\begin{array}{l} a\circ(c\circ d)=a\circ b=b \\ (a\circ c)\circ d=c\circ d=b \end{array}\right\} a\circ(c\circ d)=(a\circ c)\circ d$$

Bu şekilde devam edilirse "o" işleminin birleşme özelliğine sahip olduğu görülür.

<u>Ters eleman özelliği:</u> $\forall x\in S$ için $x^{-1}\in S$ var mı?

$a\in S$ birim eleman olup $a^{-1}=a$ dır.

$b\in S$ için $b\circ d=d\circ b=a \Rightarrow b^{-1}=d$

$c\in S$ için $c\circ c=a \Rightarrow c^{-1}=c$

$d\in S$ için $d\circ b=b\circ d=a \Rightarrow d^{-1}=b.$

<u>Not:</u> Burada $b^{-1}=d$ olduğundan $d^{-1}=b$ dir. Çünkü, x in tersi x^{-1} iken x^{-1} in tersi x idi. Yani, x ile x^{-1} birbirinin tersidir.

<u>Değişme özelliği:</u> $\forall x, y \in S$ için $x \circ y = y \circ x$ mi?

$a \in S$ birim eleman olduğundan $\forall x \in S$ için $a \circ x = x \circ a$ dır.

$b \circ c = d$, $c \circ b = d \Rightarrow b \circ c = c \circ b$

$b \circ d = a$, $d \circ b = a \Rightarrow b \circ d = d \circ b$

$c \circ d = b$, $d \circ c = b \Rightarrow c \circ d = d \circ c$

$\therefore$ "$\circ$" değişme özelliğine sahiptir.

<u>Not:</u> $(S, \circ)$ ikilisi değişmeli (Abel) gruptur.

Şimdi de "$\square$" işlemini inceleyelim.

<u>Birim eleman:</u> $\forall x \in S$ için $x \square e = e \square x = x$ olacak şekilde $e \in S$ var mı?

$a \square a = d \Rightarrow a$ birim eleman değil
$b \square c = b \Rightarrow b$ " " "
$c \square a = b \Rightarrow c$ " " "
$d \square a = c \Rightarrow d$ " " "

Birim eleman yoktur.

Ters eleman özelliği: Birim eleman olmadığından ters eleman özelliği de yoktur.

Birleşme özelliği: $\forall x, y, z \in S$ için $x \square (y \square z) = (x \square y) \square z$ mi?

$$\left.\begin{array}{l} a \square (b \square c) = a \square b = a \\ (a \square b) \square c = a \square c = b \end{array}\right\} \; a \square (b \square c) \neq (a \square b) \square c \Rightarrow \text{Birleşme özelliği yoktur.}$$

Değişme özelliği: $\forall x, y \in S$ için $x \square y = y \square x$ midir?

$b \square c = b$, $c \square b = d \Rightarrow b \square c \neq c \square b \Rightarrow$ Değişme özelliği yoktur

Soru: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + y - 1$ ile tanımlanan "$*$" işleminin bir iç işlem olduğunu göstererek özelliklerini inceleyiniz.

Çözüm:

"$*$" iç işlemdir: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + y - 1 \in \mathbb{Z}$ olup "$*$" işlemi $\mathbb{Z}$ de bir iç işlemdir.

<u>Birleşme özelliği:</u> $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için $x*(y*z)=(x*y)*z$ mi?

$$x*(y*z) = x*(y+z-1) = x+y+z-1-1 = x+y+z-2$$
$$(x*y)*z = (x+y-1)*z = x+y-1+z-1 = x+y+z-2$$

$\Rightarrow \forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için $x*(y*z)=(x*y)*z$ olup "$*$" işlemi $\mathbb{Z}$ de birleşme özelliğini sağlar.

<u>Birim eleman özelliği:</u> $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x*e=e*x=x$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}$ var mıdır?

$$\left.\begin{array}{l} x*e = x \Leftrightarrow x+e-1=x \Leftrightarrow e=1 \\ e*x = x \Leftrightarrow e+x-1=x \Leftrightarrow e=1 \end{array}\right\} \text{ } e=1\in\mathbb{Z}, \text{ "}*\text{" işleminin birim elemanıdır.}$$

<u>Ters eleman özelliği:</u> $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x*x^{-1}=x^{-1}*x=1$ olacak şekilde $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} x*x^{-1}=1 \Leftrightarrow x+x^{-1}-1=1 \Leftrightarrow x^{-1}=2-x \\ x^{-1}*x=1 \Leftrightarrow x^{-1}+x-1=1 \Leftrightarrow x^{-1}=2-x \end{array}\right\} \text{ } \forall x\in\mathbb{Z} \text{ için } x^{-1}=2-x\in\mathbb{Z} \text{ tersi vardır.}$$

Değişme özelliği: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = y * x$ mıdır?

$x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x \Rightarrow$ Değişme özelliği vardır.

Not: $(\mathbb{Z}, *)$ ikilisi bir değişmeli (Abel) gruptur.

Soru: $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ kümesinin toplama işlemine göre değişmeli (Abel) grubu olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: . $G \neq \emptyset$: $a = b = 0 \in \mathbb{Q}$ için $0 + 0\sqrt{2} = 0 \in G$ olup $G \neq \emptyset$ dır.

. Toplama işlemi G de iç işlemdir: $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2} \in G$ elemanlarını alalım. $x + y \in G$ mi?

$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in G$

(Son eşitliği $(\mathbb{Q}, +)$ değişmeli grubunun birleşme ve değişme özelliklerini kullanarak yazdık.)

<u>Birleşme özelliği</u>: $\forall x,y,z \in G$ alalım. $x+(y+z)=(x+y)+z$ olduğunu göstereceğiz.

$x,y,z \in G \Rightarrow x=a+b\sqrt{2},\ y=c+d\sqrt{2},\ z=e+f\sqrt{2}$ şeklindedir.

$$x+(y+z)=(a+b\sqrt{2})+[(c+d\sqrt{2})+(e+f\sqrt{2})]$$
$$=(a+b\sqrt{2})+[(c+e)+(d+f)\sqrt{2}] \quad ((\mathbb{Q},+) \text{ değişmeli grup})$$
$$=[a+(c+e)]+(b+(d+f))\sqrt{2}$$
$$=[(a+c)+e]+((b+d)+f)\sqrt{2} \quad ((\mathbb{Q},+) \text{ değişmeli grup})$$
$$=[(a+c)+(b+d)\sqrt{2}]+(e+f\sqrt{2}) \quad \text{"} \quad \text{"}$$
$$=[(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})]+(e+f\sqrt{2}) \quad \text{"} \quad \text{"}$$
$$=(x+y)+z$$

O halde, toplama işlemi G de birleşme özelliğine sahiptir.

Birim eleman: $\forall x \in G$ için $x+e=e+x=x$ olacak şekilde $e \in G$ var mı?

$$\left.\begin{array}{l} x+e=x \Rightarrow e=0 \\ e+x=x \Rightarrow e=0 \end{array}\right\} e=0 \in G \quad \text{birim elemandır.}$$

Ters eleman: $\forall x \in G$ için $x+x^{-1}=x^{-1}+x=0$ olacak şekilde $x^{-1} \in G$ var mı?

$x=a+b\sqrt{2}$, $a,b \in \mathbb{Q}$ şeklindedir.

$x+x^{-1}=0 \Rightarrow a+b\sqrt{2}+x^{-1}=0 \Rightarrow x^{-1}=-a-b\sqrt{2} \in G$

$x^{-1}+x=0 \Rightarrow x^{-1}+a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow x^{-1}=-a-b\sqrt{2} \in G$

$\Rightarrow x^{-1}=-a-b\sqrt{2}$, $x=a+b\sqrt{2} \in G$ nin tersidir.

$\therefore (G,+)$ ikilisi bir gruptur.

Şimdi de bu grubun değişmeli olup olmadığını inceleyelim.

$\forall x = a+b\sqrt{2},\ y = c+d\sqrt{2} \in G$ için $x+y = y+x$ mi?

$$x+y = (a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$$

$$y+x = (c+d\sqrt{2}) + (a+b\sqrt{2}) = (c+a) + (d+b)\sqrt{2} = (a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

($(\mathbb{Q},+)$ değişmeli grup)

$\Rightarrow x+y = y+x$ olduğundan toplama işleminin G de değişme özelliği vardır.

$\Rightarrow (G,+)$ grubu değişmeli (Abel) grubudur.

Soru: Bir (G,T) grubunda $\forall a \in G$ için $aTa = e$ ise G nin değişmeli grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (G,T) grubunda $\forall a \in G$ için $aTa = e$ olduğunu kabul edelim. $\forall x,y \in G$ için

$$xTy = yTx$$

olduğunu göstereceğiz.

$\forall x, y \in G$ alalım.

$x, y \in G$ ve G grubunun kapalılık özelliğinden

$xTy \in G$ olur. Kabul gereği

$(xTy)T(xTy) = e$

olur. Her iki tarafı soldan x ile işlersek

$xT[(xTy)T(xTy)] = xTe = x$

olur. G grubu birleşme özelliğini sağladığından

$[xT(xTy)]T(xTy) = x$

ve

$[\underbrace{(xTx)}_{e \text{ (kabulden)}}Ty]T(xTy) = x$

olur ve $eTy=y$ olduğundan

$$yT(xTy)=x$$

elde edilir. Son eşitlik soldan y ile işlenirse

$$yT[yT(xTy)]=yTx$$

birleşme özelliği $\Rightarrow$ $\underbrace{(yTy)}_{e \text{ (Kabulden)}}T(xTy)=yTx \Rightarrow eT(xTy)=yTx$

$\Rightarrow xTy=yTx \Rightarrow (G,T)$ grubu değişmeli gruptur.

Tanım: (G,T) ve $(H,\perp)$ grup olmak üzere $f:G\to H$ dönüşümü $\forall x,y\in G$ için $f(xTy)=f(x)\perp f(y)$ özelliğini sağlıyor ise f e grup homomorfizmi denir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite2

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"