ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite1

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"

Tanım: $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. $A \times A \longrightarrow A$ ya tanımlanan bir fonksiyona bir iç işlem, A kümesine de bu iç işleme göre kapalıdır denir.

Genel olarak iç işlem; $\top$, $\perp$, Δ, $\circ$, $\square$, $*$ sembolleri ile gösterilir.

$\top$, A üzerinde bir iç işlem ise

$$\begin{aligned} \top : A \times A &\longrightarrow A \\ (x,y) &\rightarrow \top(x,y) = x \top y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve $\forall (x,y) \in A \times A$ için $x \top y \in A$ dır.

Örnek: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde toplama işlemi bir iç işlemdir ve

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) &\longrightarrow +(x,y) = x + y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde çarpma işlemi bir iç işlemdir ve

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(x,y) \longrightarrow \cdot(x,y) = x \cdot y$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}_T$ tek tam sayılar kümesi üzerinde toplama işlemi bir iç işlem değildir. Çünkü; $3,5 \in \mathbb{Z}_T$ için

$3+5=8 \notin \mathbb{Z}_T$ dir.

Birleşme özelliği

T, A kümesi üzerinde bir iç işlem olmak üzere

$\forall x,y,z \in A$ için

$$xT(yTz) = (xTy)Tz$$

oluyorsa T işlemine birleşimlidir veya birleşme özelliği ne sahiptir denir.

Örnek: Toplama işlemi tam sayılar kümesi üzerinde, çarpma işlemi reel sayılar kümesi üzerinde birleşme özelliğine sahiptir.

Değişme özelliği

T, A kümesi üzerinde bir iç işlem olmak üzere $\forall x, y \in A$ için $xTy = yTx$ oluyorsa T ye A üzerinde değişimlidir veya değişme özelliğine sahiptir denir.

Örnek: $\forall x, y \in \mathbb{N}$ için $x+y=y+x$ olduğundan toplama işlemi $\mathbb{N}$ üzerinde değişimlidir.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x.y=y.x$ olup çarpma işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde değişimlidir.

Örnek: $\mathbb{R}^+$ yı ele alalım. $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $xTy = x^y$
şeklinde bir T fonksiyonu tanımlayalım.

T bir iç işlem midir?

$\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $xTy = x^y \neq 0$ olup $xTy \in \mathbb{R}^+$ dır. O
halde, T, $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir iç işlemdir.

T değişimli midir?

T değişimlidir ancak ve ancak $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $xTy = yTx$
dir. Bunun için $x^y = y^x$ olmalıdır. Fakat, $x=2$, $y=3 \in \mathbb{R}^+$
için

$$2T3 = 2^3 = 8, \quad 3T2 = 3^2 = 9$$ ve $8 \neq 9$ olup T, $\mathbb{R}^+$
üzerinde değişimli değildir.

Regüler eleman

T, A üzerinde bir iç işlem olsun. $\forall x,y \in A$ için

$$aTx = aTy \text{ ve } xTa = yTa \text{ iken } x = y$$

duyorsa $a \in A$ elemanına $*$ işlemine göre regüler eleman denir.

<u>Örnek:</u> $\forall x, y \in \mathbb{N}$ için

$$x + a = y + a \text{ ve } a + x = a + y \text{ iken } x = y$$

olduğundan $a \in \mathbb{N}$ doğal sayısı toplama işlemine göre regüler elemandır. Bu özellik tüm doğal sayılar için sağlanacağından her doğal sayı toplama işlemine göre regüler elemandır.

<u>Örnek:</u> $0 \in \mathbb{Z}$ çarpma işlemine göre regüler eleman değildir. Çünkü, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x.0 = y.0 \text{ ve } 0.x = 0.y \text{ dir, fakat } x \neq y \text{ dir.}$$

$z \neq 0$ olmak üzere $\forall z \in \mathbb{Z}$ çarpma işlemine göre regüler elemandır. Çünkü $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$xz = yz \text{ ve } zx = zy \text{ iken } x = y \text{ dir.}$$

Birim eleman

T, A üzerinde bir iç işlem olsun. $\forall x \in A$ için

$xTe = eTx = x$ olacak şekilde $e \in A$ varsa e ye T işlemine göre birim eleman denir.

Örnek: $\mathbb{N}$ doğal sayılar, $\mathbb{Z}$ tam sayılar ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin toplamaya göre birim elemanı 0, çarpmaya göre birim elemanı ise 1 dir.

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$x . 1 = 1 . x = x$$

Teorem: Bir iç işlemin birim elemanı varsa tektir.

İspat: T, A kümesi üzerinde bir iç işlem ve e bu iç işlemin birim elemanı olsun. T nin e' gibi bir birim elemanı daha olduğunu kabul edelim. $e = e'$ olduğunu göstereceğiz.

e birim olup $\forall x \in A$ için $eTx = xTe = x$ dir.

e' birim olup $\forall x \in A$ için $e'Tx = xTe' = x$ dir.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e \text{ birim olduğundan } eTe' = e' \\ e' \text{ birim olduğundan } eTe' = e \end{array}\right\} e = e'$$

$\therefore$ Bir iç işlemin birim elemanı varsa tektir.

Ters eleman

T, A üzerinde bir iç işlem ve e bu işlemin birim elemanı olsun. $x \in A$ için $xTx' = x'Tx = e$ olacak şekilde bir $x' \in A$ varsa x' ne x in ters elemanı veya tersi denir.

Örnek: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde sıfır hariç hiç bir elemanın tersi yoktur. Örneğin; $2 \in \mathbb{N}$ nin tersi yoktur. Çünkü

$2 + x' = x' + 2 = 0$ olacak şekilde $x' \in \mathbb{N}$ yoktur.

$0 \in \mathbb{N}$ için $\underbrace{0}_{x'}+0=\underbrace{0}_{x'}+0=\underbrace{0}_{e}$ olup 0, 0 ın tersidir.

Örnek: $2\in\mathbb{Z}$ nin toplama işlemine göre tersi -2 dir.

Çünkü; $2+\underbrace{(-2)}_{x'}=\underbrace{(-2)}_{x'}+2=\underbrace{0}_{e}$ dır.

$x\in\mathbb{Z}$ nin tersi $-x\in\mathbb{Z}$ dir. Çünkü;

$$x+\underbrace{(-x)}_{x'}=\underbrace{(-x)}_{x'}+x=\underbrace{0}_{e} \quad \text{dir.}$$

Teorem: T, A kümesi üzerinde birleşimli bir iç işlem olmak üzere T nin birim elemanı e olsun. $x\in A$ elemanının tersi varsa tektir ve x elemanı regülerdir.

İspat: $x\in A$ nın x' ve x'' gibi tersleri olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$xTx'=x'Tx=e \quad \text{ve} \quad xTx''=x''Tx=e$$

yazılabilir.

$x' = x'Te = x'T(xTx'') = (x'Tx)Tx'' = eTx'' = x''$
(Birleşme özelliği)

$\Rightarrow x' = x''$ olup $x \in A$ nın tersi tektir.

Şimdi, $x \in A$ nın regüler eleman olduğunu gösterelim. $\forall y, z \in A$ için

$$xTy = xTz \text{ ve } yTx = zTx$$

olduğunu kabul edelim. $y = z$ olduğunu gösterirsek $x \in A$ regülerdir diyebiliriz.

$xTy = xTz \Rightarrow x'T(xTy) = x'T(xTz)$

$\Rightarrow (x'Tx)Ty = (x'Tx)Tz$ (Birleşme özelliği)

$\Rightarrow eTy = eTz \Rightarrow y = z$ (Birim eleman özelliği)

Benzer şekilde;

$yTx = zTx \Rightarrow (yTx)Tx' = (zTx)Tx$

$\Rightarrow yT(xTx') = zT(xTx')$ (Birleşme özelliği)

$\Rightarrow yTe = zTe \Rightarrow y = z$ (Birim eleman özelliği)

$\therefore$ x regülerdir

<u>Not:</u> x elemanının varsa tersi x^{-1} ile gösterilecektir

<u>Not:</u> 1) x in tersi x^{-1} ise x^{-1} nün tersi x dir.

2) Birim eleman e nin tersi kendisidir.

3) A kümesi üzerinde tanımlı T iç işlemi için

$xTe = x, \forall x \in A$, oluyorsa e ye sağ birim

$eTx = x, \forall x \in A$, oluyorsa e ye sol birim denir.

Aynı kural ters eleman için de geçerlidir. Yani,

$xTx^{-1} = e$ oluyorsa x^{-1} e sağ ters

$x^{-1}Tx = e$ oluyorsa x^{-1} e sol ters eleman denir.

Teorem: Bir A kümesi üzerinde T birleşimli bir iç işlem olmak üzere bu iç işlemin birim elemanı e olsun. $x, y \in A$ nın tersi, sırasıyla, x^{-1} ve y^{-1} ise xTy nin de tersi vardır ve $y^{-1}Tx^{-1}$ dir.

İspat: x in tersi $x^{-1} \Rightarrow xTx^{-1} = x^{-1}Tx = e$

y nin tersi $y^{-1} \Rightarrow yTy^{-1} = y^{-1}Ty = e$

xTy nin tersinin $y^{-1}Tx^{-1}$ olduğunu göstermek için

$$(xTy)T(y^{-1}Tx^{-1}) = e \quad \text{ve} \quad (y^{-1}Tx^{-1})T(xTy) = e$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$(xTy)T(y^{-1}Tx^{-1}) \overset{\text{(Birleşme öz.)}}{=} xT(yTy^{-1})Tx^{-1} = xTeTx^{-1}$$
$$= (xTe)Tx^{-1} = xTx^{-1} = e$$

(Birim eleman öz.)

$$(y^{-1} T x^{-1}) T (x T y) = y^{-1} T (x^{-1} T x) T y = y^{-1} T e T y = (y^{-1} T e) T y$$

(Birleşme öz.) (Birim eleman öz.)

$$= y^{-1} T y = e$$

$$\Rightarrow (x T y)^{-1} = y^{-1} T x^{-1}$$

<u>İç işlem izomorfizmi</u>

$T: A \times A \to A$ ve $\perp : B \times B \to B$ birbirinden farklı iki iç işlem olmak üzere

$$f: A \to B$$

fonksiyonu

1) birebir ve örten,

2) $f(x T y) = f(x) \perp f(y)$, $\forall x, y \in A$

özelliklerini sağlıyorsa f e A dan B ye bir izomor-

..., A ile B ye izomorfik (eş yapılı) denir.

Hatırlatma:

$f: A \to B$ bir fonksiyon olsun.

$f(x)=f(y)$ iken $x=y$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir. Buna denk olarak, $x \neq y$ olan $\forall x, y \in A$ için $f(x) \neq f(y)$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

- $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = 3x+5 \end{aligned}$ fonksiyonu birebirdir. Çünkü;

$f(x)=f(y) \Rightarrow 3x+5=3y+5 \Rightarrow x=y$ olur.

- $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = x^2 \end{aligned}$ fonksiyonu birebir değildir.

$\forall y \in B$ için $f(x)=y$ olacak şekilde $\exists x \in A$ varsa f e örten fonksiyon denir.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to f(x) = 3x+5$ fonksiyonu örtendir. Çünkü,

$\forall y \in \mathbb{R}$ için $x = \dfrac{y-5}{3} \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa

$$f(x) = 3x+5 = 3 \cdot \frac{y-5}{3} + 5 = y \quad \text{olur.}$$

Örnek: $A = \{2^x : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde çarpma işlemi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde toplama işlemi birer iç işlemdir.

$f: \mathbb{R} \to A$
$x \to f(x) = 2^x$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun bir izomorfizm olduğunu gösterelim:

f birebir ve örtendir:

$f(x)=f(y) \Rightarrow 2^x=2^y \Rightarrow x=y \Rightarrow f$ birebirdir.

$\forall y \in A$ alalım. $f(x)=y$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{R}$ var mı?

$f(x)=y \Rightarrow 2^x=y \Rightarrow x=\log_2 y$

O halde, $x=\log_2 y \in \mathbb{R}$ için $f(x)=y$ olup f örtendir.

$f(x+y)=f(x).f(y)$ mi?

$f(x+y)=2^{x+y}=2^x 2^y=f(x)f(y)$

$\therefore f$ fonksiyonu izomorfizmadır ve $\mathbb{R}$ ile A kümeleri izomorfik (eş yapılı) tir.

Örnek: "·" işlemi $\mathbb{R}^+$ ve "+" işlemi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan bildiğimiz çarpma ve toplama işlemleri olmak üzere $a>1$ olan bir a pozitif tamsayısı için

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \log_a(x) = \log_a x$$

fonksiyonunun bir izomorfizma olduğunu gösterelim.

Birebirlik: $\log_a x = \log_a y$ olan $\forall x,y \in \mathbb{R}^+$ için $x=y$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow \log_a x - \log_a y = 0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \underbrace{a^0}_{1} \Rightarrow x = y$$

Örtenlik: $\forall y \in \mathbb{R}$ için $\log_a x = y$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{R}$

var mı?

$\log_a x = y \Rightarrow x = a^y$

$\forall y \in \mathbb{R}$ için $x = a^y \in \mathbb{R}^+$ olup $\log_a x = \log_a a^y = y$ olduğun-

dan örtendir.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ mıdır?

logaritma fonksiyonunun özelliğinden dolayı bu

eşitlik sağlanır.

$\therefore \log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a>1, a \in \mathbb{Z}^+)$

bir izomorfizmdir.

<u>Not:</u> T, A üzerinde ve $\perp$, B üzerinde iç işlemler olmak üzere $f: A \to B$ bir izomorfizm olsun.

1) T işlemine göre A nın birimi e ise f(e) de $\perp$ işlemine göre B nin birimidir. Yani; izomorfizm birim elemanı birim elemana dönüştürür.

f bir izomorfizm $\Rightarrow$ $\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in A$ vardır.

$\forall y \in B$ için $\quad y \perp f(e) = f(x) \perp f(e) = f(x T e) = f(x) = y$

(f izomorfizm) (birim eleman öz.)

$$f(e) \perp y = f(e) \perp f(x) = f(e T x) = f(x) = y$$

(f izomorfizm) (birim eleman öz.)

olup f(e), B nin $\perp$ işlemine göre birimidir.

2) $f^{-1}: B \to A$ vardır ve bir izomorfizmdir.

$f: A \to B$ izomorfizm $\Rightarrow f$ birebir ve örten $\Rightarrow f^{-1}$ var ve birebir, örtendir. f^{-1} in izomorfizm olduğunu göstermek için $\forall y_1, y_2 \in B$ alalım ve

$$f^{-1}(y_1 \perp y_2) = f^{-1}(y_1) \top f^{-1}(y_2)$$

olduğunu gösterelim.

$\forall y_1, y_2 \in B$ için f örten olduğundan $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in A$ vardır.

$$f^{-1}(y_1 \perp y_2) = f^{-1}(f(x_1) \perp f(x_2)) \underset{(f \text{ izomorfizm})}{=} f^{-1}(f(x_1 \top x_2))$$

$$\underset{(f \text{ birebir})}{=} x_1 \top x_2 = f^{-1}(y_1) \top f^{-1}(y_2)$$

Burada $f(x_1)=y_1$ ve $f(x_2)=y_2$ olup

$$f^{-1}(f(x_1))=f^{-1}(y_1) \;,\; f^{-1}(f(x_2))=f^{-1}(y_2)$$

olur ve f örten olduğundan

$$x_1=f^{-1}(y_1) \text{ ve } x_2=f^{-1}(y_2)$$

elde edilir.

Dağılma özelliği: T ve $\perp$ bir A kümesi üzerinde iç işlemler olmak üzere $\forall x,y,z\in A$ için

$$x\perp(yTz)=(x\perp y)T(x\perp z)$$

$$(xTy)\perp z=(x\perp z)T(y\perp z)$$

özellikleri sağlanıyorsa $\perp$ iç işlemi, T iç işlemi üzerine, sırasıyla, soldan ve sağdan dağılımlıdır denir. Her ikisi birden sağlanıyorsa $\perp$ iç işlemi, T iç işlemi üzerine dağılımlıdır denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ de çarpma ve toplama işlemleri için

$$x(y+z)=xy+xz\ ,\ (x+y)z=xz+yz\ ,\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$$

olduğundan çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine hem soldan hem sağdan dağılımlıdır, yani, dağılımlıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}$ de toplama işlemi çarpma işlemi üzerine dağılımlı değildir.

$x,y,z\in\mathbb{Z}$ için $\quad x+(y.z)\neq(x+y)(x+z)$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Ünite1

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Matematik Bölümü
Lineer Cebir I "Mat 103"