



Fırsatlar Sunar

Türev 3. Bölüm



Diferansiyel: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in X$ noktasında türevlenebilir olsun. O zaman

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

yazılır.

Böylece x -in uygun bir komşuluğunda $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\varepsilon \rightarrow 0$ olmak şartıyla

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

Buradan

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \text{ olup}$$

$f'(x) \cdot \Delta x$ ifadesine f fonksiyonunun x noktasındaki Δx artımına göre diferansiyeli denir ve $df(x)$ ile gösterilir.

Yani $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx$ dir.

NOT: Diferansiyelden faydalanarak yaklaşık hesaplama veya hata analizi yapılabilir.

$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$ eşitliğinde ϵ yeteri kadar küçük seçilirse

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ yaklaşımı bulunur.

ÖR: $\sqrt{18}$ 'in yaklaşık değerini bulalım. $x=16$, $\Delta x=2$ ve $f(x)=\sqrt{x}$ alınırsa $x+\Delta x=18$ olup

$$\begin{aligned}\sqrt{18} = f(18) &\approx f(16) + f'(16) \cdot 2 \\ &= 4 + \left. \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|_{x=16} \cdot 2 = 4 + \frac{1}{4} = 4,25 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖR: $\sqrt[3]{25}$ 'in yaklaşık değeri için $x=27$, $\Delta x=-2$ ve

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt[3]{x} \text{ alınırsa } x+\Delta x=25 \text{ olup } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ ile} \\ \sqrt[3]{25} &= f(25) \approx 3 + \frac{1}{27} \cdot (-2) \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖR: Bir kenar uzunluğu 20 cm olan bir küpün hacmi bulunurken kenar uzunluğunu ölçerken yapılan hata 0,001 cm ise küpün hacminde yapılan hata nedir?

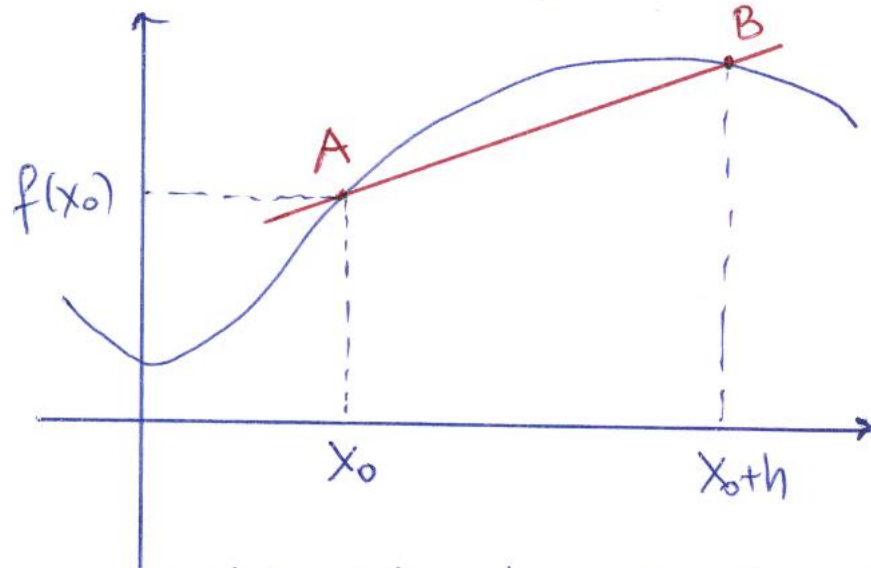
V hacim, x kenar uzunluğu, dx ise yapılan hata ise dV -de hacimde yapılan hata olup

$$V(x) = x^3 \Rightarrow dV = 3x^2 \cdot dx = 3 \cdot 400 \cdot 0,001 = 1,2 \text{ cm}^3$$

bulunur.

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ için $x_0 + h \in (a, b)$ olsun. $A(x_0, f(x_0))$ ve $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ noktalarını birleştiren K kirisini alalım.



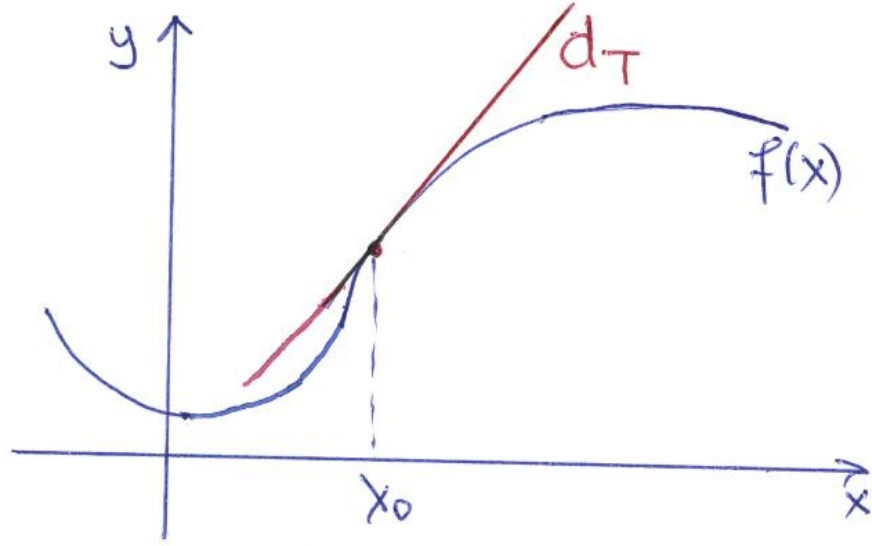
K kirisinin eğimine m desek

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

olur. B noktasını grafik üzerinde A noktasına yaklaştırmak için $x_0 + h$ 'i x_0 -a yaklaştırmamız

gerekir. Yani $h \rightarrow 0$ gitmelidir. K kirisini A noktasından girip B noktasından çıktığından $h \rightarrow 0$ için B noktası A noktasıyla çakışır ve K kirisini A noktasında grafiğe teget olan bir doğru olur. O zaman bu tegetin

eğimi $\lim_{h \rightarrow 0} m(h)$ olmalıdır. Çünkü bu teğet doğrusu $h \rightarrow 0$ için limit alınarak bulunmuştur. Buradan



d_T teğet doğrusunun eğimi

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

olup $m = f'(x_0)$ bulunur. Yani $A(x_0, f(x_0))$ noktasında $f(x)$ eğrisine teğet olan doğrunun

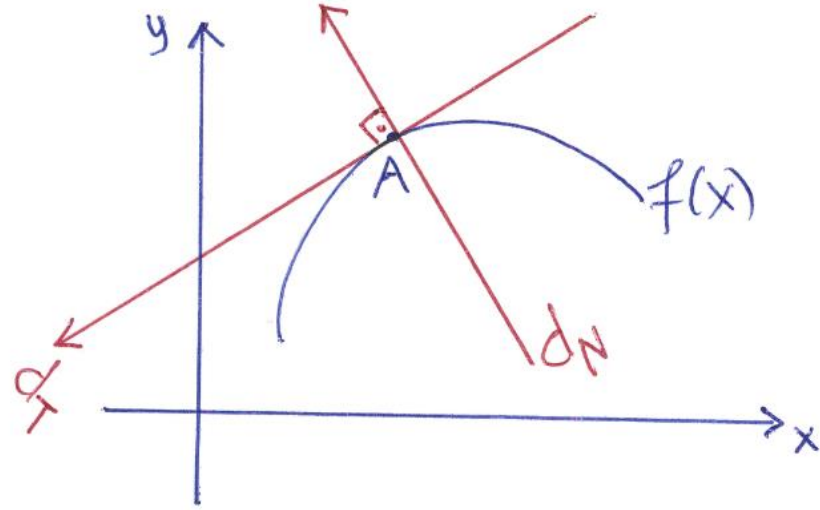
eğimi $f'(x_0)$ dir. Buna göre

$$d_T: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

teğet doğrusunun denklemi olur.

Teğet doğrusuna değme noktasında dik olan doğruya normal doğru denir ve d_N ile gösterilir. $d_T \perp d_N$ olduğundan

Teğetin eğimi m_T ile normalin eğimi m_N 'nin çarpımı -1 olmalıdır. O zaman $m_T = f'(x_0)$ old. dan $m_N = \frac{-1}{f'(x_0)}$ dir.



Buna göre

$$d_N: y = f(x_0) + \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

normal denklemi yazılır. $A(x_0, f(x_0))$ noktası $y = f(x)$ 'in, teğetin ve

normalin ortak noktasıdır.

UYARI : Geometrik yoruma göre $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirse, grafiğinde x_0 apsisi noktadan bir tek teğet doğrusu geçer. Yani grafiğin üzerinde birden fazla teğetin çizilebilir olması o noktada fonksiyonun türevlenemez olduğu anlamına gelir.

Türevin Fiziksel Yorumu:

t zaman parametresi olmak üzere $y = f(t)$ yol denkleminde göre hareket eden bir hareketlinin t_0 anındaki hızını bulalım.

$t \neq t_0$ olmak üzere t anındaki katedilen yol $f(t)$ ve t_0 anındaki katedilen yol $f(t_0)$ olup $[t_0, t]$ zaman aralığındaki ortalama hız toplam yol / toplam zaman formülünden $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ olur. Bu ortalama hız olup anlık hız için $t \rightarrow t_0$ giderseniz t_0 anındaki anlık hız $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$ olur. Bu anlık hızda $v(t_0)$ ile gösterilir.

ÖR: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ fonksiyonunun $x=3$ apsisi noktasından geçen teğet ve normal denklemini bulalım.

$f(3) = 2$ olup noktamız $A(3,2)$ dir.

$d_T: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ve $d_N: y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ olduğundan

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ için $f'(3) = 9$ ile

$$d_T: y = 2 + 9(x - 3) \quad \text{ve} \quad d_N: y = 2 - \frac{1}{9}(x - 3)$$

$$y = 9x - 25 \quad : \quad 9y + x - 21 = 0$$

olur.

ÖR: Yol denklemi $s(t) = 2t + 3t^2 + t^3$ olan bir hareketlinin

5. saniyedeki hızı $s'(5) = 2 + 6t + 3t^2 \Big|_{t=5} = 107$ olup

3. saniyedeki ivmesi

$$s''(3) = 6 + 6t \Big|_{t=3} = 24 \text{ olur.}$$

ÖR: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$ şeklinde verilen $y = f(x)$ eğrisine $B(2,2)$ noktasından çizilen teğet ve normalin denklemini bulalım.

$d_T: y = mx + n$ ifadesinde $m = f'(2,2)$ old. dan ilk önce y' -nı bulalım. Kapalı fonk.ın türevinden

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x - 2y + 2}{-2x + 2y + 1} \text{ olup } m_T = y' \Big|_{(2,2)} = -2$$

bulunur. Buradan da $m_N = \frac{1}{2}$ ile

$$d_T: y = 2 + (-2) \cdot (x - 2)$$

$$d_N: y = 2 + \frac{1}{2} (x - 2) \text{ olur.}$$



Fırsatlar Sunar



Prof. Dr. İlker ERYILMAZ



Ders Adı: Analiz II



Konu Adı: Türev 3.Bölüm



Ünite 3