



Fırsatlar Sunar

Türev 2. Bölüm



4.4. Teorem : $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ İki fonksiyon olsun.

f fonksiyonu $a \in X$ noktasında; g fonksiyonu $f(a)$ noktasında türevlenebilirse $g \circ f: X \rightarrow Z$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında türevlenebilir olup

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

dir.

İspat:

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ayrı ayrı limit
varolabilir
değildir

$f(a) = b, f(x) = y$
alınırsa f sürekli
olduğu
 $x \rightarrow a, f(x) \rightarrow f(a)$
yani $y \rightarrow b$ olup

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= g'(b) \cdot f'(a)$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

* Bileşme fonksiyonun türevine zincir kuralı da denir.

NOT: Eğer f fonksiyonu z 'nin bir fonksiyonu, z ise x 'in bir fonksiyonu ve x de t 'nin bir fonksiyonu ise
 $(y = f \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow t)$ f fonksiyonunda t -ye bağlı olup türevlenebilirlik sağlanmak şartıyla

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ olur.}$$

→ Bu nota göre bileşke fonk.'nın türevi alınırken dıştan içe herseferinde birkez türev alınarak çarpım şeklinde yazılır.

ÖR: $y = \sin^5 3x$ için $y' = 5 \cdot \sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot 3$ olur.

ÖR: $y = \left(\frac{3x-1}{2x} \right)^{4/7}$ için $y' = \frac{4}{7} \left(\frac{3x-1}{2x} \right)^{-\frac{3}{7}} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2x - (3x-1) \cdot 2}{4x^2} \right)$ dir.

ÖR: $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ için
 $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ dir, gösterelim.

$a > 0, a \neq 1$ için $x^\alpha = a^{\alpha \cdot \log_a x}$ eşitliği kullanılırsa
 $(x^\alpha)' = [a^{\alpha \cdot \log_a x}]'$

$$= a^{\alpha \cdot \log_a x} \cdot \ln a (\alpha \cdot \log_a x)' = x^\alpha \cdot \cancel{\ln a} \cdot \frac{\alpha}{x \cdot \cancel{\ln a}} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

dur.

ÖR: $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x-7}\right)^2}$ için $\frac{dy}{dx} = y' = ?$

$$y' = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2-3x}{x^3+4x-7}\right)^{-\frac{1}{3}} \left[\frac{(2x-3) \cdot (x^3+4x-7) - (x^2-3x) \cdot (3x^2+4)}{(x^3+4x-7)^2} \right]$$

4.5. Teorem (Ters - Fonksiyonun Türevi) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve artan (azalan) bir fonksiyon olsun. $c \in (a, b)$ olmak üzere $f(c) = d$ ve $f'(c) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu da d noktasında türevlenebilir olup

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)} \text{ dir.}$$

İspat: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve monoton olduğundan 1-1 ve örten olup f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Buradan

$$(f^{-1})'(d) = \lim_{y \rightarrow d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \lim_{y \rightarrow d} \frac{x - c}{f(x) - f(c)}$$

f^{-1} varold. dan $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$d = f(c) \Leftrightarrow f^{-1}(d) = c$$

f^{-1} sürekli olup $y \rightarrow d \Rightarrow$

$f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(d) := x \rightarrow c$ dir

$$= \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right]} = \frac{1}{f'(c)} \text{ olur.}$$

→ Bu teorem sayesinde f 'nin tersi olan f^{-1} fonksiyonunu bulmadan türevinin bir noktada değeri bulunabilir.

ÖR: $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$ için $(f^{-1})'(33) = ?$

$d = 33$ alınırsa $33 = f(c) \Rightarrow c = 3$ olur. O zaman

$$(f^{-1})'(33) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{3x^2 + 2} \Big|_{x=3} = \frac{1}{29} \text{ olur.}$$

ÖR: $y = \arctan x$ fonksiyonunun $x = 1$ 'deki türevini bulalım.

$f^{-1}(x) = \arctan x$, $d = 1$ alınırsa $f(x) = \tan x$ ve

$f(c) = d \Rightarrow 1 = \tan c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$ olur. O zaman

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{(\tan x)'} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Kapalı Fonksiyonun Türevi: $F(x,y)=0$ şeklinde verilen bir $f(x)=y$ fonksiyonunun türevini bulmak için $F(x,y)=0$ denkleminde $y=f(x)$ elde edilebiliyorsa (yalnız bırakabiliyorsa) direkt hesaplama yapılır.

$F(x,y)=0$ denkleminde y - yalnız bırakılamıyorsa denklemdaki her terimin x -e göre türevi alınır. Burada y -ninde x -in bir fonksiyonu olduğu unutulmamalıdır.

Örneğin

$x^2+3y^3+2xy=0$ denkleminde $y=f(x)$ olduğunu da dikkate alarak türev alırsa $2x+9y^2 \cdot y' + 2(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$ ifadesinden $y' = \frac{-2x-2y}{9y^2+2x}$ olur.

O zaman $F(x,y)=0$ denkleminde türev alırsa

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-dF/dx}{dF/dy} \text{ dir.}$$

Yani $F(x,y)=0$ denklemiyle verilen bir $y=f(x)$ için

$F_x := x'$ e göre türev

$F_y := y'$ ye göre türev olmak üzere $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ dir.

Parametrik Fonksiyonların türevi:

$t \in (\alpha, \beta)$ olmak üzere x ve y -nin ortak bir t parametresiyle yazılmış fonksiyona parametrik fonksiyon denir. Yani $x=x(t)$, $y=y(t)$ olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonu

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ şeklinde verilmiş ise y' -nü bulmak için zincir kuralını uygularsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ olur.}$$

ÖR: $a > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} x(t) = \frac{at^3}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{at^2}{1+t} \end{cases}$$

şeklinde verilen $y=f(x)$ için $y' = ?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ olması gerektiği } y'_t = \frac{2at(1+t) - at^2 \cdot 1}{(1+t)^2} \text{ ve}$$

$$x'_t = \frac{3at^2(1+t^2) - at^3 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} \text{ olup}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2at - at^2}{(1+t)^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{3at^2 + at^4} \text{ olur.}$$

* Parametrik Fonksiyonda y fonk. u x -e bağlı old. dan y' -de x -e bağlı olması gerekirken y' , t parametresine bağlı çıkmaktadır.

Logaritmik Türev alma:

$u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir iseler $u^v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir. Bunun için

$y = u(x)^{v(x)}$ fonksiyonunun türevi için her iki tarafın doğal logaritması alınır ve türev alınıp y' yalnız bırakılır:

$$y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right]$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right] \text{ bulunur.}$$

ÖR: $f(x) = x^{\sin x}$ için $f'(x) = ?$

$y = x^{\sin x}$ için y' -nü bulmak istersek;

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right] \text{ bulunur.}$$

Bazı Özel Fonksiyonların Türevleri:

$$\rightarrow (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\rightarrow (\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightarrow (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\rightarrow (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\rightarrow (\sinh x)' = \cosh x$$

$$\rightarrow (\cosh x)' = \sinh x$$

4.3. Yüksek Mertebeden Türev ve Türevin geometrik yorumu

f fonksiyonu I tanım kümesinde türevlenebilirse f' türev fonksiyonunda I üzerinde tanımlı olur. ve buna f 'nin türev fonksiyonu denir. Eğer $\forall a \in I$ noktasında $f'(x)$ türevlenebilirse yani $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ limiti var ve sonlu ise bu limit

değerine f 'nin a noktasındaki ikinci mertebeden türevi denir ve $f''(a)$ ile gösterilir. Yani f kullanılarak f' , f' fonksiyonu kullanılarak f'' fonksiyonu belirler.

4.6. Tanım: Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a \in I$ noktasında $(n-1)$. mertebeden türevi var ve $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$ limiti var ve sonlu ise bu limite f 'nin n . mertebeden türevi denir ve $f^{(n)}(a)$ ile gösterilir

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $\forall x \in I$ için n . mertebeden türevlenebilir ise $f^{(n)}(x)$ fonksiyonu tanımlıdır ve fonksiyon $y^{(n)}$, $f^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $D^n f$ sembolleriyle de gösterilir.

ÖR: $f(x) = (ax+b)^n$ için $f^{(n)}(x) = ?$

* Yüksek mertebeden türev bulunurken birkaç türev bulunduktan sonra bir kural çıkarılabilir.

$$f'(x) = n(ax+b)^{n-1} \cdot a$$

$$f''(x) = n(n-1) \cdot (ax+b)^{n-2} \cdot a^2$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) \cdot (ax+b)^{n-3} \cdot a^3$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \cdots 1 \cdot (ax+b)^{n-n} \cdot a^n \\ &= n! \cdot a^n \end{aligned}$$

bulunur.

ÖR: $f(x) = \sin x$ için $f^{(n)}(x)$ bulalım.

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x$$

olup 4 seferde bir
tekrar olduğu görülür.

$f^{(n)}(x)$ için bir
formül bulunamazken

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x \cdot (-1)^k, & n = 2k \\ \cos x \cdot (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

bulunur. Yine

$f^{(0)}(x) = \sin x$, $f'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$, ...
olmasıyla $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ bulunabilir.

ÖR: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ de tanımlı $f(x) = \frac{1}{x-2}$ için $f^{(n)}(x)$ -i bulalım.

$$f(x) = f^{(0)}(x) = (x-2)^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot (x-2)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (x-2)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (x-2)^{-4}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot (-1)^n \cdot (x-2)^{-n-1}$$

bulunur.

ÖR: $f(x) = 3^x$ için $f^{(n)}(x) = ?$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = 3^x$$

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$$

$$f''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^2 \dots \dots f^{(n)}(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^n \text{ olur.}$$

→ Eğer bir f fonksiyonunun n . mertebeden türevi varsa daha önceki tüm türevleri vardır. Benzer şekilde n . mertebeden türevi yoksa daha yüksek mertebeden türevleri de yoktur.

NOT: $I \subset \mathbb{R}$; $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları n . mertebeden türevlenebilir olsunlar. O zaman

$$1^o) D^n(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot D^n(f) , \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2^o) D^n(f+g) = D^n f + D^n g$$

$$3^o) m+k \leq n \text{ olmak üzere } D^m(D^k f) = D^{m+k} f \text{ olur.}$$

ÖR: $f(x) = \frac{4}{x^2+4x+3}$ için $f^{(n)}(x) = ?$ ($x \neq -1, x \neq -3$)

f fonksiyonundan $f', f'', f''' \dots$ türevleri alınır
aralarında bir ilişki veya kural bulmak mümkün değildir.

Omn yerine

$$f(x) = \frac{4}{x^2+4x+3} = \frac{4}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3}$$

yazılıp yukarıdaki nota göre 2^o) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(x) &= \left\{ \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3} \right\}^{(n)} = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{x+1} \right\}^{(n)} - 2 \cdot \left\{ \frac{1}{x+3} \right\}^{(n)} \\
 &= 2 \cdot n! (-1)^n \cdot (x+1)^{-n-1} - 2 \cdot n! (-1)^n \cdot (x+3)^{-n-1}
 \end{aligned}$$

bulunur.

4.7. Teorem (Leibnitz Formülü)

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları n . mertebeden türevlenebilir iki fonksiyon ise $(f^{(k)})$ k . mertebeden türev olmak üzere $(f \cdot g)(x)$ fonksiyonunda n . mertebeden türevlenebilir olup

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Türev
mertebesi

ÖR: $h(x) = e^{x-1} \cdot (x^2 + 2x - 2)$ için $h^{(n)}(x) = ?$

$f(x) = e^{x-1}$ ve $g(x) = x^2 + 2x - 2$ alırsa

$f^{(n)}(x) = e^{x-1}$ olup $g'(x) = 2x + 2$, $g''(x) = 2$ ve $r \geq 3$

için $g^{(r)}(x) = 0$ dir. Buna göre

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$ için Leibnitz Formülü kullanırsa

$$h^{(n)}(x) = (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

$$= f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) +$$

$$+ \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g'''(x) + \dots$$

$$= e^{x-1} \cdot (x^2 + 2x - 2) + n \cdot e^{x-1} \cdot (2x + 2) + \frac{n(n-1)}{2} e^{x-1} \cdot 2 + 0 + 0 + \dots$$

$$= e^{x-1} (x^2 + 2x - 2 + n(2x + 2) + n(n-1)) \text{ olur.}$$

ÖR: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ şeklinde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $y'' = ?$

Parametrik fonksiyonun türevini hatırlarsak;

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \text{ idi.}$$

Buradan hareketle $f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx}$

olup $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$ bulunur. Formül olarak $y'' = \frac{y_t'' \cdot x_t' - x_t'' \cdot y_t'}{(x_t')^2}$ verilebilir.

ÖR: $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = 2^t + t - 1 \end{cases}$ şeklinde verilen $y = f(x)$ için $y'' = ?$

İlk olarak y' -nü bulalım.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2^t \cdot \ln 2 + 1}{2t + 2} \text{ olur.}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \text{ old. dan } y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \text{ dir.}$$

$$y' = \frac{2^t \cdot \ln 2 + 1}{2t+2} \text{ old. dan } \frac{dy'}{dt} = \frac{2^t \cdot (\ln 2)^2 \cdot (2t+2) - (2^t \cdot \ln 2 + 1) \cdot 2}{(2t+2)^2}$$

olup y'' için yerne yazılması yeterlidir.

NOT:

$F(x,y)=0$ şeklinde verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $y'=f'(x)$ fonksiyonunu bulmak için $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ kısa yolunu bulmuştuk. Fakat y'' için veya daha yüksek mertebeler için böyle bir formül bulmak mümkün değildir. y -nin x -in bir fonksiyonu olduğunu unutmadan y' -nin tekrar türevi alınır.

Örneğin $x^2+y^2-25=0$ denklemi ile verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \text{ olup } y'' \text{ için tekrar türev}$$

$$\text{alınırsa } y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = \frac{-1 \cdot y - (-x) \cdot y'}{y^2} = \frac{-y + x \cdot y'}{y^2}$$

İfadesi bölümün türeviyle bulunur.

$$\text{Buradan } y' \text{ yerine yazılırsa } y'' = \frac{-y + x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \text{ olur.}$$

ÖR: $x^y + y^x - xy + 5 = 0$ şeklinde verilen $y = f(x)$ için $y' = ?$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y x^{y-1} + y^x \ln y - y}{x^y \ln x + x \cdot y^{x-1} - x} \text{ olur.}$$

ÖR: $x^3 + y^2 - xy - x = 0$ şeklinde verilen $y = f(x)$ için $y'' = ?$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(3x^2 - y - 1)}{2y - x} \text{ olup } y'' \text{ için tekrar türev alınırsa}$$

$$y'' = \frac{(-6x + y') \cdot (2y - x) + (3x^2 - y - 1) \cdot (2y' - 1)}{(2y - x)^2} \text{ olup } y' \text{ yerine yazılmalıdır.}$$



Fırsatlar Sunar



Prof. Dr. İlker ERYILMAZ



Ders Adı: Analiz II



Konu Adı: Türev 2.Bölüm



Ünite 2