



Fırsatlar Sunar

Türev 1. Bölüm



4. TÜREV

Bu kısımda analizin önemli kavramlarından birisi olan türev kavramı tanıtılacaktır ve elementer fonksiyonların türevleri bulunacaktır.

4.1. Tanım : $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in I$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti var ve sonlu ise bu limit değerine f fonksiyonunun a noktasındaki türevi denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

Eğer f , I aralığının her noktasında türevlenebilir ise f -ye I aralığında türevlenebilirdir denir ve $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ türev fonksiyonu tanımlanır.

Türev tanımında $x - a = h$ alınırsa $x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ olup bu tanım

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ şeklinde de verilebilir. Bu

tanımdan hareketle $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ fonksiyonunun kuralı $\forall x \in I$ için

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

şeklinde dir.

$y=f(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $D_x f$ veya $\frac{df(x)}{dx}$ sembolleriyle de gösterilebilir.

4.2. Tanım : $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in I$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti var ve sonlu ise bu limite

f 'nin a noktasındaki sol türevi derir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ sonlu limitine f 'nin a noktasındaki sağ türevi derir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

Eğer $f'(a^+) = f'(a^-)$ ise f -ye a noktasında türevlenebilir denir. Limit bilgilerini de hatırlarsak $f'(a^+) = f'(a^-)$ ise $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$ dir.

UYARI:

$D_f = [a, b]$ şeklinde bir kapalı aralık ise uç noktalarda türevlenebilir olmak farklıdır. a noktası başlangıç noktası olduğundan $f'(a) = f'(a^+)$; b noktası bitiş noktası old. dan $f'(b) = f'(b^-)$ olması yeterlidir.

ÖRNEKLER:

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonu için $f'(x) = 0$ dir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \text{ dir.}$$

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ in $f'(x) = 1$ dir;

Her $x \in \mathbb{R}$ in

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \text{ dir.}$$

(3) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ o.ü: $g(x) = x^n$ in $g'(x) = n \cdot x^{n-1}$ dir;

$\forall x \in \mathbb{R}$ in

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^n} + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \dots + h^{n-1}$$

$$= x^{n-1}$$

(4) $K(x) = \sin x$, $K: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$ için $K'(x) = \cos x$ dir;

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} K'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{=1} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

$= \cos x$ olur.

Benzer yolla $(\cos x)' = -\sin x$ bulunabilir.

(5) $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x=0$ noktasında türevlenemezdir.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{şeklinde tanımlı } f \text{ için } x=0 \text{ kritik nokta olup}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1, \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

old. dan $f'(0)$ yoktur.

(6) $a > 0, a \neq 1$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ limitini bulalım.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t+1)}$$

$$a^h - 1 = t \Leftrightarrow a^h = t + 1 \Rightarrow h = \log_a(t+1)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \ln a}{\ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t} \ln(t+1)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{u \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)}$$

$\frac{1}{t} = u$
alınrsa

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u} = \frac{\ln a}{\ln\left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$$

olur.

Buna göre $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) için $f'(x)$ bulalım.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \ln a \text{ olur.}$$

↑ yukarıdaki limitler

(7) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ için $f'(x)$ 'i bulalım.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{x \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h}}{x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow h \rightarrow 0$ then $\frac{x}{h} \rightarrow \infty$ olup $\frac{x}{h} = u$ alırsa

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x} \text{ dir.}$$

Buradan $g(x) = \log_a x$ için ($a > 0, a \neq 1$) $g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ olup
 $g'(x) = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ olur.

(8) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ için $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad \leftarrow \text{eslenik ile} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

çarpılırsa

Buna göre f , $x=0$ noktasında tanımlı ve sürekliliğine rağmen $f'(x)$, $x=0$ 'da tanımsızdır. Yani $f': (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklindedir.

(9) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonu için $x=1$ noktası kırık nokta olup sağ ve sol türevlere bakmak gereklidir. Yani $f'(1)$ için $f'(1+)$, $f'(1-)$ incelenmelidir.

Buna göre

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$$

olduğundan $f'(1)$ yoktur. Onun dışında

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{olup } f': \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tanımlıdır.}$$

4.2. Teorem: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonk. olsun. f , $x=a \in I$ noktasında türevlenebiliyorsa f $a \in I$ noktasında süreklidir. **$T \Rightarrow S$**

İspat:

f , $a \in I$ noktasında türevlenebilir olsun. O zaman

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti var ve sonludur. Cebirsel işlemlerde

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \text{ yazılabilir. Her iki tarafın}$$

$x \rightarrow a$ limiti alınırsa

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right]$$

Her terimin limiti olduğundan limit dağılır.

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a) \text{ olup } f \text{ } a\text{-da süreklidir.}$$

UYARI: Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani f fonksiyonun $x=a$ noktasında sürekli olması türevlenebilir olmasını gerektirmez. Örneğin $f(x)=|x|$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli ama türevlenebilir değildir.

Türevlenebilirlik sürekliliğin yanısıra smooth grafik ister. Yani fonksiyon grafiğinde sert köşe, ani dönüş ve sıçrama kopma gibi noktalar varsa türevlenebilirlik pek gözlemlenmez.

NOT: (Önemli) Bu teoremin en güzel kullanışı karşıt tersidir. Yani bir fonksiyon bir noktada süreksiz ise kesinlikle o noktada türevlenemezdir. Kısaca ($\sim S \Rightarrow \sim T$) süreksiz ise türevlenemezdir.

Teorem 4.3: $I \subset \mathbb{R}$ ve $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ I ’i türevlenebilir fonksiyon olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$(i) (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$(ii) (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(iii) g(x) \neq 0 \text{ olmak üzere } \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ dir.}$$

İspat: f, g fonksiyonları türevlenebilir iseler

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

limitleri vardır ve f, g fonksiyonları sürekli oldukları için.

Buna göre

$$\begin{aligned} (i) (\alpha f + \beta g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - (\alpha f + \beta g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x) + \beta g(x+h) - \beta g(x)}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha [f(x+h) - f(x)]}{h} + \frac{\beta [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

ayrı ayrı limitler olduğundan

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \beta \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

olur.

① $(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$\uparrow$ sürekli
 g türevlenebilir olduğundan
 f // // limit var
 limit var

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

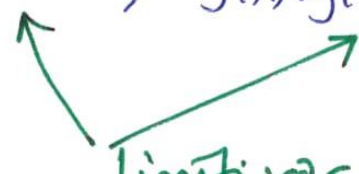
$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ olur.}$$

$$\textcircled{\text{iii}} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} - \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} - \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$



 limiti var

NOT: Bu teoreme göre

$$(f(x) \mp g(x))' = f'(x) \mp g'(x)$$

$$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$$

$$ve \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ dir.}$$



Fırsatlar Sunar



Prof. Dr. İlker ERYILMAZ



Ders Adı: Analiz II



Konu Adı: Türev



Ünite 1