ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5

KONİKLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde bir konik denklemi verildiğinde denklemin katsayılarını kullanarak koniğin çeşidini belirleyeceğiz:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \ldots(1)$$

genel konik denklemine eksenlerin döndürülmesi işlemi uygulanırsa

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0 \quad \ldots(2)$$

bulunur. A' ve C' için üç durum vardır

1) $A'\neq 0$, $C'\neq 0$ **2)** $A'\neq 0$, $C'=0$ **3)** $A'=0$, $C'\neq 0$

Şimdi bu durumları irdeleyelim:

1) $A'\neq 0$ ve $C'\neq 0$ olsun. Bu durumda da

a) A' ile C' aynı işaretlidir **b)** A' ile C' zıt işaretlidir.

1a) A' ile C' aynı işaretli olsun. $A'>0$ ve $C'>0$ alalım. ($A'<0$, $C'<0$ ise denklemin her iki yanı (-1) ile çarpılarak $A'>0$, $C'>0$ yapılabilir)

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (2)$$

denklemine öteleme işlemi uygularsa

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \ldots (3)$$

bulunur. Burada 3 durum vardır;

i) $F' < 0$ ii) $F' = 0$ iii) $F' > 0$

Şimdi bu durumları inceleyelim:

i) $F' < 0$ olsun.

$$\Rightarrow A'x''^2 + C'y''^2 = -F' \Rightarrow \frac{x''^2}{\underbrace{\frac{-F'}{A'}}_{a^2,\ >0}} + \frac{y''^2}{\underbrace{\frac{-F'}{C'}}_{b^2,\ >0}} = 1 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ (reel elips)}$$

* $A' = C'$ için çember olacağına dikkat ediniz.

ii) $F' = 0$ olsun

$$\Rightarrow A'x''^2 + C'y''^2 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{\underbrace{\frac{1}{A'}}_{a^2}} + \frac{y''^2}{\underbrace{\frac{1}{C'}}_{b^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ (Nokta elips)}$$

* $A' = C'$ için nokta çember olacağına dikkat ediniz.

iii) $F' > 0$ olsun.

$$\Rightarrow A'x''^2 + C'y''^2 = -F' \Rightarrow \frac{x''^2}{\underbrace{\frac{F'}{A'}}_{a^2}} + \frac{y''^2}{\underbrace{\frac{F'}{C'}}_{b^2}} = -1 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1 \text{ (sanal elips)}$$

Not:

* $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ reel elips, $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2} = 1 \rightarrow$ reel çember

* $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \rightarrow$ nokta elips, $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2} = 0 \rightarrow$ nokta çember

* $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1 \rightarrow$ sanal elips, $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2} = -1 \rightarrow$ sanal çember

dir.

1b) A' ile C' zıt işaretli olsun.

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \ldots (3)$$

denklemi için iki durum söz konusudur.

i) $F' \neq 0$ ii) $F' = 0$

Şimdi bu durumları irdeleyelim:

$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \ \ldots (3)$

i) $F' \neq 0$ olsun.

$$\Rightarrow \frac{x''^2}{-\frac{F'}{A'}} + \frac{y''^2}{-\frac{F'}{C'}} = 1 \Rightarrow \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ veya } -\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ (hiperbol)}$$

biri pozitif
diğeri negatif

* $A' = -C'$ ise ikizkenar hiperbol olacaktır.

Not:

$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ veya $-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ hiperbol denkleminde $a = b$

olursa hiperbole ikizkenar hiperbol denir.

ii) $F' = 0$ olsun.

(3) den $A'x''^2 + C'y''^2 = 0 \Rightarrow y'' = \mp\sqrt{\frac{A'}{C'}}\, x''$ olur.

$y'' = \mp\sqrt{\frac{A'}{C'}}\,x''$ denklemi kesişen iki doğru belirtir. Hiperbol sınıfına dahil edilir.

1) $A' \neq 0,\ C' \neq 0$ 2) $A' \neq 0,\ C' = 0$ 3) $A' = 0,\ C' \neq 0$ almış idik.

Şimdi 2 yi inceleyelim:

2) $A' \neq 0$ ve $C' = 0$ olsun.

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ konliğinin dönmeden sonraki denklemi

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (2)$$

idi. Bu denklem

$$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (4)$$

olur. Burada 4 durum vardır:

a) $D' \neq 0, E' \neq 0$ b) $D' \neq 0, E' = 0$ c) $D' = 0, E' \neq 0$ d) $D' = 0,\ E' = 0$

Bu durumları inceleyelim:

2a) $D' \neq 0$, $E' \neq 0$ olsun.

$$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad \ldots (4)$$

denklemine öteleme işlemi uygulanırsa, $O'(h,k)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases}$$ ötelemesi için

$$A'(x''+h)^2 + D'(x''+h) + E'(y''+k) + F = 0$$

$$\Rightarrow A'x''^2 + \underbrace{(2A'h + D')}_{0}x'' + E'y'' + \underbrace{A'h^2 + D'h + E'k + F}_{0} = 0$$

Yukarıdaki katsayıları sıfır yapan h ve k değerleri bulunabilir. O halde konik denklemi,

$$A'x''^2 + E'y'' = 0$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{A'}{E'}x''^2$$ olup parabol denklemidir.

2b) $D' \neq 0$, $E' = 0$ olsun.

$$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \ldots (4)$$

denklemi $A'x'^2 + D'x' + F = 0$ olur. $x' = x'' + h$, $y' = y'' + k$ uygulanırsa

$$A'x''^2 + \underbrace{(2A'h + D')}_{0}x'' + \underbrace{A'h^2 + F}_{F'} = 0$$

ifadeyi sıfır yapan h değeri bulunur. Sabite de F' denilirse

$$A'x''^2 + F' = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow x''^2 = -\frac{F'}{A'} \text{ olur.}$$

i) $-\frac{F'}{A'} > 0$ ise $x''^2 = a^2 \Rightarrow x'' = \mp a$ paralel iki doğru olup parabol sınıfına dahil edilir.

ii) $-\frac{F'}{A'} < 0$ ise $x''^2 = -a^2$ olup sanaldır. Grafiği çizilmez.

iii) $-\frac{F'}{A'} = 0$ ise $x''^2 = 0 \Rightarrow x'' = 0$ olup çakışık iki doğrudur. Parabol sınıfındandır.

2c) $D'=0,\ E'\neq 0$ olsun.

$$A'x'^2+D'x'+E'y'+F=0 \quad \dots (4)$$

denklemi $A'x'^2+E'y'+F=0$ olur. $x'=x''+h,\ y'=y''+k$ uygulanırsa,

$$A'x''^2+\underbrace{2A'h}_{0}x''+E'y''+\underbrace{A'h^2+E'k+F}_{0}=0$$

ifadeleri sıfır yapan h ve k değerleri bulunabilir. Konjiğin denklemi

$$y''=-\frac{A'}{E'}x''^2$$ olup paraboldür.

2d) $D'=0,\ E'=0$ olsun.

(4) den $A'x'^2+F=0$ bulunur.

$$\Rightarrow x'^2=-\frac{F}{A'}$$

i) $-\frac{F}{A'}>0$ ise paralel iki doğru **ii)** $-\frac{F}{A'}<0$ ise sanaldır **iii)** $-\frac{F}{A'}=0$ ise çakışık iki doğrudur.

1) $A' \neq 0,\ C' \neq 0$ 2) $A' \neq 0,\ C' = 0$ 3) $A' = 0,\ C' \neq 0$ alınız idik.

3) $A' = 0,\ C' \neq 0$ olsun. Bu gruptaki konik sınıflandırması 2. gruptakine benzer biçimdedir.

Teorem: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ koniğine

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$ dönmesini uygulayalım:

$$\underbrace{(\ldots)}_{A'} x'^2 + \underbrace{(\ldots)}_{B'} x'y' + \underbrace{(\ldots)}_{C'} y'^2 + \underbrace{(\ldots)}_{D'} x' + \underbrace{(\ldots)}_{E'} y' + F = 0$$

$\Rightarrow A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ bulunur. (Katsayılar dönme denklemi yerine yazılarak bulunabilir)

Bu durumda,

1) $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

2) $A' + C' = A + C$

3) $A' - C' = \mp\sqrt{(A-C)^2 + B^2}$ dir.

Özet ve Sonuç

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ koniğine dönme işlemi uygulayarak

$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$ $(B'=0)$ elde edildi.

1) $A'>0$, $C'>0$ için konik elips sınıfından bulundu.

$\Rightarrow 4A'C'-B'^2>0$ dır. Teoremden $4A'C'-B'^2=4AC-B^2$ olduğundan

elips sınıfı için $4AC-B^2>0$ dır.

$A'=C'$ ise elips çember oluyordu. Teoremden

$$A'-C'=\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}=0 \Rightarrow A=C \text{ ve } B=0 \text{ dır.}$$

O halde $A=C$ ve $B=0$ ise konik çemberdir.

2) A' ile C' zıt işaretli ise konik hiperbol sınıfından bulundu.

$$4A'C'-B'^2<0 \Rightarrow 4AC-B^2<0 \text{ dır.}$$

$\Rightarrow$ $4AC-B^2<0$ ise konik hiperbol sınıfındandır.

$A'=-C'$ ise hiperbol ikizkenar hiperbol oluyordu.

Teoremden $A'+C'=A+C$ olduğundan ikizkenar hiperbol için $A=-C$ olmalıdır.

3) $A' \neq 0,\ C' = 0$ veya $A' = 0,\ C' \neq 0$ ise konik parabol sınıfından bulundu.

$\Rightarrow 4A'C' - B'^2 = 0 \Rightarrow 4AC - B^2 = 0$ olur.

O halde $4AC - B^2 = 0$ ise konik parabol sınıfındandır.

Örnek:

$y^2 - 6y + 4x + 5 = 0$ koniğinin çeşidini belirleyiniz.

Çözüm:

$A = 0,\ B = 0,\ C = 1 \Rightarrow 4AC - B^2 = 0$ olup konik paraboldür.

Örnek:

$x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{6} = 0$ koniğinin çeşidini belirleyiniz.

Çözüm:

$A = 1,\ B = 1,\ C = 1 \Rightarrow 4AC - B^2 = 3 > 0$ O halde konik elipstir.

Örnek: $8x^2+4\lambda xy+\lambda(\lambda+1)y^2+y+5=0$ konik ailesindeki koniklerin sınıflarını λ parametresine göre irdeleyiniz.

Çözüm:

$$4AC-B^2 = 16\lambda^2-32\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ veya } \lambda=-2 \text{ olur.}$$

λ		-2		0	
$4AC-B^2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ $\lambda=0$ ve $\lambda=-2$ ise konik paraboldür

$-2<\lambda<0$ için konik hiperboldür

$\lambda<-2$ veya $\lambda>0$ için konik elipstir.

* Ailedeki parabollerin denklemlerini yazalım

$\lambda=0$ için $8x^2+y+5=0$

$\lambda=-2$ için $8x^2-8xy+2y^2+y+5=0$ olur.

* Ailede çember var mıdır?

$$8x^2+4\lambda xy+\lambda(\lambda+1)y^2+y+5=0$$

Çember için $B=0$ ve $A=C$ olmalı. Bu mümkün olmadığından ailede çember yoktur.

* Ailede ikizkenar hiperbol var mıdır?

$A=-C$ olmalıdır.

$$\Rightarrow \lambda(\lambda+1)=-8 \Rightarrow \lambda^2+\lambda+8=0$$

Bu denklemin kökü olmadığından ailede ikizkenar hiperbol yoktur.

Örnek: $\lambda x^2 + 2\lambda xy - 3y^2 + 2x + y + 1 = 0$ konik ailesini λ ya göre irdeleyiniz. Ailede parabol, çember ve ikizkenar hiperbol varsa denklemlerini yazınız.

Uyarı

$\Delta = 4AC - B^2$ ve $K = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$ olmak üzere,

1) $\Delta > 0$ için,

* $K < 0$ ise konik elips * $K = 0$ ise konik nokta elips * $K > 0$ ise sanal elipstir

2) $\Delta < 0$ için,

* $K \neq 0$ ise konik hiperbol * $K = 0$ ise konik kesişen bir çift doğrudur

3) $\Delta = 0$ için,

* $K \neq 0$ ise konik parabol * $K = 0$ ise paralel veya çakışık bir doğrudur

Örnek: $4x^2-4xy+y^2-6x+3y+2=0$ koniğinin çeşidini belirleyiniz.

Çözüm:

$\Delta=4.4.1-16=0$ (parabol sınıfı)

$$K=\begin{vmatrix} 8 & -4 & -6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ paralel veya çakışık iki doğru.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 5