Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Uygulama 2

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 14

22) (X,τ) bir topolojik uzay ve β , τ için bir taban olsun. Eğer β' açık kümelerin bir ailesi ve $\beta \subset \beta'$ ise, β' de τ nun bir tabanı olduğunu gösterelim.

Çözüm : Her $A\in\tau$ açığı için β taban olduğundan $A= \cup B_i$, $B_i\in \beta$ dır. $\beta \subset \beta'$ olduğundan $B_i\in \beta'$ dır. Dolayısıyla $A= \cup B_i$, $B_i\in \beta'$ dır. β' τ için bir tabandır.

23) τ_1 ve τ_2 bir X kümesi üzerinde iki topoloji ve β_1, β_2 sırasıyla τ_1 ve τ_2 nın tabanları olsun. Eğer $\beta_1 \subset \beta_2$ ise, $\tau_1 \subset \tau_2$ olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall A\in \tau_1$ için $A= \cup B_i$, $B_i\in \beta_1$ dır. $\beta_1 \subset \beta_2$ olduğundan $B_i\in \beta_2$ dır. O halde $A=\cup B_i$, $B_i\in \beta_2$ Buradan $A\in \tau_2$ dır. Böylece $\tau_1 \subset \tau_2$ dır.

24) R^2 düzleminin her $x=(x_1,x_2)\in R^2$ noktasını merkez kabul eden herhangi bir $B(x,r)$ açık dairesini kapsayan bütün kümelerinin ailesi $N(x)=\{N\subset R^2 : B(x,r) \subset N\}$ ailesi (N_1),(N_2),(N_3) ve (N_4) özelliklerini sağladığını ve böylece $N(x)$ in R^2 üzerinde bir topoloji ürettiğini gösterelim.

Çözüm: N_1) $\forall N\in N(x)$ için $N(x)$ in tanımından $x\in N$ dır.

N_2) Herhangi $N\in N(x)$ ve $N\subset M$ olsun. $N\in N(x)$ olduğundan $\exists$ $B(x,r)$ açık dairesi var $\ni$ $B(x,r)\subset N$ dır. $N\subset M$ olduğundan $B(x,r)\subset M$ dır. O halde $M\in N(x)$ dır.

N_3) Herhangi $N_1,N_2\in N(x)$ için $N_1\cap N_2\in N(x)$ olduğunu gösterelim.

$N_1\in N(x)$ için $\exists$ $B(x,r_1)$ açık dairesi var $\ni$ $B(x,r_1)\subset N_1$ dır.

$N_2\in N(x)$ için $\exists$ $B(x,r_2)$ açık dairesi var $\ni$ $B(x,r_2)\subset N_2$ dır.

$r=\min\{r_1,r_2\}$ olsun. Bu durumda $B(x,r)\subset N_1\cap N_2$ ve dolayısıyla $N_1\cap N_2\in N(x)$ dır.

N_4) Herhangi $N \in N(x)$ ise, öyle bir $M \in N(x)$ var ki her $y \in M$ için $N \in N(y)$ dır? İfadesinin doğruluğunu gösterelim.

$N \in N(x)$ olsun. Bu durumda $\exists$ $B(x,r)$ açık dairesi var $\ni$ $B(x,r) \subset N$ dır. $M=B(x,r)$ alabiliriz. O halde $B(x,r) \in N(x)$ dır. Çünkü $B(x,r) \subset R^2$ ve $x \in B(x,r) \subset B(x,r)$ dır. $\forall y \in B(x,r)$ için $B(x,r) \in N(y)$ ve $B(x,r) \subset N$ olması ve (N_2) den $N \in N(y)$ dır.

Şimdi $N(x)$ ailesinin R^2 üzerinde bir topoloji ürettiğini gösterelim.

$$\tau = \{N \in P(X) : x \in N \text{ ve } N \in N(x), x \in R^2\}$$

şeklinde tanımlanan τ ailesi R^2 de bir topoloji mi?

t_2) Herhangi $N_1, N_2 \in \tau$ için (N_3) den $N_1 \cap N_2 \in \tau$ dır.

t_3) $\{N_i\}_{i\in I} \subset \tau$ verilmiş olsun. $\forall i \in I$ için $N_i \in N(x)$ ve $N_i \subset \bigcup_{i\in I} N_i$ olması (N_2) den $\bigcup_{i\in I} N_i \in N(x)$ dır. O halde $\bigcup_{i\in I} N_i \in \tau$ dır.

t_1) τ da birleşim ve kesişim tanımlı olduğundan $\bigcup_{i\in\varnothing} N_i = \varnothing$ ve $\bigcap_{i\in\varnothing} N_i = X$ dır. O halde $\varnothing, X \in \tau$ dır. Böylece τ ,R^2 de bir topolojidir.

Burada $N(x)$ in tanımından $N \in N(x)$ kümesinin $N = \bigcup_{x\in N} B(x,r)$ şeklinde yazılabileceği dikkate alındığında τ topolojisinin elemanları, R^2 üzerindeki alışılmış topolojinin elemanlarından başkası değildir. Yani $N(x)$ ailesi R^2 nın alışılmış topolojisini üretmiş oldu.

25) $X \neq \varnothing$ kümesinin her $x \in X$ noktası için II.Bölüm, Çözülmüş örnek 8 deki şartları sağlayan bir $E'(x)$ ailesi verilmiş olsun. $E'(x)$ ailesinin X kümesi üzerinde bir τ topolojisi ürettiğini ve bu topolojiye göre $x \in X$ noktasının komşuluklar tabanı olan $E(x)$ ın $E'(x)$ e eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm: Her $x \in X$ için $\beta'(x) = \{N' \subset X : \exists\, E' \in E'(x) \text{ var } \ni E' \subset N'\}$ ailesini tanımlayalım. $\beta'(x)$ ailesinin teorem 2.11 deki (N_1), (N_2), (N_3) ve (N_4) özellikleri sağladığını önce gösterelim.

N_1) $E'(x)$ ailesi (i) den $x \in E'(x)$ olup, $E'(x) \neq \varnothing$ dır. $E'(x) \subset \beta'(x)$ olmasından $\beta'(x) \neq \varnothing$ dır.Eğer $N' \in \beta'(x)$ alınırsa $E' \subset N'$ olacak şekilde $E' \in E'(x)$ vardır. Yine (i) den $x \in E'$ olduğundan $x \in N'$ olur.

N_2) Herhangi $N' \in \beta'(x)$ ve $N' \subset M$ için $\beta'(x)$ in tanımından $M \in \beta'(x)$ olduğu açıktır.

N_3) Herhangi $N'_1, N'_2 \in \beta'(x)$ için $E'_1 \subset N'_1$, $E'_2 \subset N'_2$ olacak şekilde E'_1 , $E'_1 \in E'(x)$ vardır. Diğer taraftan (ii) den $E'_3 \subset E'_1 \cap E'_2 \subset N'_1 \cap N'_2$ olacak şekilde $E'_3 \in E'(x)$ vardır. $\beta'(x)$ in tanımından $N'_1 \cap N'_2 \in \beta'(x)$ olur.

N_4) Herhangi $N' \in \beta'(x)$ alalım. $\beta'(x)$ in tanımından $E' \subset N'$ olacak şekilde $E' \in E'(x)$ vardır. (iii) den $\exists\, E'_o \in E'(x)$ var $\ni$ her $y \in E'_o$ için $E'_y \subset E'$ olacak şekilde $E'_y \in E'(y)$ vardır. Buradan $E'_y \in \beta'(y)$ olur.(N_2) den $E' \in \beta'(y)$ olur. $E' \subset N'$ olmasından $N' \in \beta'(y)$ dır. Diğer taraftan $E'(x) \subset \beta'(x)$ olmasından $E'_o \in \beta'(x)$ olur. Sonuç olarak her $N' \in \beta'(x)$ için $\exists\, E'_o \in \beta'(x)$ var $\ni$ her $y \in E'_o$ için $N' \in \beta'(y)$ oldu.

Şimdi $\tau = \{ \varnothing, A \subset X$:her $x \in A$ için $A \in \beta'(x) \}$ailesini tanımlayacak olursak teorem 3.1 den bu ailenin X üzerinde bir topoloji ve $N(x) = \beta'(x)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

26) $X=\{a,b,c\}$ bir küme ve $\beta=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ ailesi verilmiş olsun. β ailesinin X üzerindeki bir topoloji için bir taban olup olmadığını gösterelim.

Çözüm: β ailesi X üzerindeki hiçbir topolojinin tabanı değildir. Çünkü β, τ gibi bir topolojinin tabanı olsaydı $\beta \subset \tau$ olduğu için β nın elemanları açıktır. Dolayısıyla $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}$ kümesi açık olup, τ nun bir elemanıdır. Halbuki

$\{b\}$ kümesi β ya ait hiçbir kümenin birleşimi olarak yazılamaz. Böylece β taban değildir

27) X={a,b,c,d} bir küme ve fl={{a,b},{b,c},{d}} ailesi verilmiş olsun. fl ailesinin X üzerinde ürettiği topolojiyi bulalım.

Çözüm: fl nın elemanlarının birleşimi X i verdiğinden fl alt taban olabilir. O halde fl nın elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu β ailesi;

$$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\},\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\},\{a,b\}\cap\{d\}=\varnothing,$$

$$\{b,c\}\cap\{b,c\}=\{b,c\},\{b,c\}\cap\{d\}=\varnothing,\{d\}\cap\{d\}=\{d\},\{a,b\}\cap\{b,c\}\cap\{d\}=\varnothing,$$

fl da kesişim işlemi tanımlı ve fl nın elemanlarının birleşimi X i verdiğinden $\bigcap_{i\in\varnothing} A_i = X$, $A_i \in$ fl olmasından

$$\beta = \{\varnothing, X, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}, \{d\}\}$$

olarak bulunur. β nın elemanlarının bazı birleşimleri olarak yazılan kümelerin oluşturduğu τ ailesini yazalım;

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}, \{d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}\}$$

dır. Kolayca gösterilebilir ki τ ailesi, (t_1),(t_2) ve (t_3) özelliklerini sağlar. O halde τ topolojisi fl ailesinin X üzerinde ürettiği topolojidir.

28) R reel sayılar kümesi ve ﬂ$=\{[x,x+1] : \forall x\in R \}$ ailesinin R üzerinde ürettiği topolojiyi bulalım.

Çözüm: $\forall x\in R$ için $[x-1,x]$, $[x,x+1]\in$ ﬂ dır. ﬂ ya ait elemanların her sonlu kesişimi her $x\in R$ için $[x-1,x]\cap[x,x+1]=\{x\}$ olduğundan $\beta=\{\{x\}:x\in R \}$ ailesi bilindiği gibi (b_1) ve (b_2) özelliklerini sağlar. O halde β ailesinin R üzerinde ürettiği topoloji, R nın ayrık topolojisidir.

29) X={a,b,c,d,e} bir küme ve P(X)=τ ,X üzerindeki ayrık topoloji olsun. X in hiçbir tek nokta kümesini içermeyen P(X) in bir alt tabanını bulalım.

Çözüm: X in altkümelerinden oluşan ve P(X) topolojisi için β tabanı X in bütün tek nokta altkümelerini içerir. O halde sonlu kesişimleri X in bütün tek nokta altkümelerini veren P(X) in alt tabanı ﬂ={{a,b},{b,c},{c,d},{d,e},{e,a}} dır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Uygulama 2

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 14