ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Uygulama 1

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 13

1) (R,d) öklid metrik uzayı, I=[0,1] R nın bir alt metrik uzayı ve I dan R ye tanımlanan bütün sürekli fonksiyonların kümesi C(I) olsun. Bu durumda $\forall f,g \in C(I)$ için

a) $d(f,g)= \sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\}$

b) $d'(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$, $x\in I$

d ve d′ fonksiyonlarının C(I) üzerinde metrik olduğunu gösterelim.

Çözüm:

a) $\forall f,g \in C(I)$ fonksiyonları sürekli olduklarından $x\in I$ için f(x) ve g(x) sınırlı fonksiyonlardır. O halde $d(f,g)= \sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\}$ tanımlıdır. Her $f,g,h \in C(I)$ için

m_1) $f(x)-g(x) \geq 0$ veya $g(x)-f(x)\geq 0 \Rightarrow |f(x)-g(x)|\geq 0$ dır. Dolayısıyla $\sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\}=d(f,g) \geq 0$ olur.

$m_3)$ $d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\} = \sup\{|(-1)(g(x)-(f(x)| : x\in I\} = \sup\{|g(x)-f(x)| : x\in I\} = d(g,f).$

$m_2)$ $d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\} = 0 \Leftrightarrow |f(x)-g(x)| = 0$, $\forall x\in I$ için

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$, $\forall x\in I$ için

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $\forall x\in I$ için

$\Leftrightarrow f=g$.

$m_4)$ $d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x\in I\} = \sup\{|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| : x\in I\}$

$\leq \sup\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| : x\in I\}$

$\leq \sup\{|f(x)-h(x)| : x\in I\} + \sup\{|h(x)-g(x)| : x\in I\}$

$= d(f,h)+d(h,g)$

olur. O halde $(C(I),d)$ bir metrik uzaydır.

b) Her $f,g \in C(I)$ ve $\forall x \in I$ için $d'(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$ şeklinde tanımlanan d' fonksiyonu anlamlıdır. Çünkü, f ve g fonksiyonları her $x \in I$ için sürekli olduklarından $x \to |f(x)-g(x)|$ fonksiyonu da sürekli ve integrallenebilir. Böylece $d'(f,g)$, f ve g fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan alandır. Bu da f ve g fonksiyonlarının birbirlerine olan uzaklıklarını gösteren uygun bir ölçüdür. Her $f,g,h \in C(I)$ ve her $x \in I$ için,

m_1) $|f(x)-g(x)| \geq 0$ olduğundan $\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = d'(f,g) \geq 0$ dır.

m_3)$d'(f,g)= \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = \int_0^1 |(-1)(g(x)-f(x)|dx = \int_0^1 |g(x)-f(x)|dx = d'(g,f)$.

m_2) $d'(f,g) = 0$ olsun. $I = [0,1]$ aralığında sürekli $F(x)=|f(x)-g(x)|$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$d'(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = \int_0^1 F(x)dx = 0$$

dır.$f = g$ olduğunu göstermek için $\forall x \in I$ iken $F(x) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Türevi $F(x)$ olan $G(x)$ fonksiyonunu alalım. Genel matematiğin temel teoremine göre,

$$\int_0^x F(t)dt = G(x)-G(0), \quad (0 \le x \le 1)$$

dır. F fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan her $x \in I$ için

$$0 \le \int_0^x F(t)dt \le \int_0^x F(t)dt + \int_x^1 F(t)dt = \int_0^1 F(t)dt = 0 = G(x)-G(0)$$

olur. Bu da G nin [0,1] üzerinde sabit fonksiyon olduğunu verir. Böylece $G'(x)=F(x)=0$ dır.

$$F(x)=|f(x)-g(x)| = 0 \Rightarrow f(x)-g(x) = 0 \;\; (\forall x \in I \text{ için}) \Rightarrow f = g$$

dır. Yani $d'(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ dır.

Tersine olarak $f = g$ olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)-g(x)=0 \Rightarrow |f(x)-g(x)|=0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = 0 \Rightarrow d'(f,g)=0$$

dır. Böylece $d'(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ dır.

m_4) $d'(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = \int_0^1 |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|dx$

$$\le \int_0^1 (|f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|)dx$$

$$= \int_0^1 |f(x)-h(x)|dx + \int_0^1 |h(x)-g(x)|dx$$

$$\le d'(f, h) + d'(h, g).$$

O halde $(C(I),d')$ bir metrik uzaydır.

2) (X,d) bir metrik uzay olsun. d metriğinden faydalanarak X kümesi üzerinde yeni bir metrik tanımlayalım.

Çözüm: Her $x,y\in X$ için $d^*(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ şeklinde tanımlanan d^* fonksiyonu (m_1), (m_2) ve (m_3) özelliklerini sağladığı kolayca gösterilebilir. (m_4) özelliğini gösterelim. Her $x,y,z\in X$ için

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)}, \ (d(y,z) \geq 0 \text{ olduğundan})$$

$$d^*(y,z) = \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \geq \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}, \ (d(x,y) \geq 0 \text{ olduğundan})$$

dır. Ayrıca d nın metrik olmasından $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ dır. O halde

$$d^*(x,z)=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d^*(x,y)+d^*(y,z)$$

olur. Böylece d^*, X üzerinde bir metriktir.

3) Her $x,y\in R$ için $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonunun R üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

Çözüm: Her $x,y,z\in R$ için

$m_1)$ $|x-y|\geq 0 \Rightarrow \sqrt{|x-y|}\geq 0$ olduğundan $d(x,y)\geq 0$ dır.

$m_2)$ $d(x,y)=0$ olsun. Bu durumda,
$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$ dir.
Tersine $x=y$ olsun. Bu durumda,
$x-y=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow d(x,y)=\sqrt{|x-y|}=0$ dır.

$m_3)$ $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}=\sqrt{|(-1)(y-x)|}=\sqrt{|y-x|}=d(y,x)$ dir.

$m_4)$ Kabul edelim ki, $d(y,z)>d(x,y)+d(x,z)$ olsun. $f(x)=x^2$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde artan fonksiyon olduğundan, $(d(y,z))^2>(d(x,y)+d(x,z))^2$ dır. Yani,

$$(d(y,z))^2=\left(\sqrt{|y-z|}\right)^2=|y-z|>\left(\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|x-z|}\right)^2$$
$$=|x-y|+|x-z|+2\sqrt{|x-y||x-z|}$$

elde edilir. Fakat alışılmış metriğe göre $|x-y|+|x-z|\geq|y-z|$ olduğundan ve ayrıca $2\sqrt{|x-y||x-z|}<0$ olamayacağından $d(y,z)\leq d(x,y)+d(x,z)$ olmalıdır.

4) (X_1,d_1) ve (X_2,d_2) metrik uzaylar ve X_1 ile X_2 nin kartezyen çarpımı $X= X_1\times X_2$ olsun. X deki her $a=(a_1,a_2)$ ve $b=(b_1,b_2)$ için

$$d : X\times X \to R\,,\ d(a,b) = \text{maks}\{d_1(a_1,b_1), d_2(a_2,b_2)\}$$

ile tanımlanan d nin X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

Çözüm: $a,b\in X$ olsun. Bu durumda $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ olacak şekilde $a_1, b_1\in X_1$ ve $a_2, b_2\in X_2$ vardır.

m_1) Hipotezden d_1 X_1 üzerinde ve d_2 X_2 üzerinde metrikler olduğundan $d_1(a_1,b_1)\geq 0$ ve $d_2(a_2,b_2)\geq 0$ dır. Böylece $d(a,b)\geq 0$ dır.

m_2) $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ olmak üzere $a,b\in X$ için $d(a,b)=0$ olsun. Bu durumda $0 \leq d_1(a_1,b_1) \leq \text{maks}\{d_1(a_1,b_1), d_2(a_2,b_2)\} = d(a,b) = 0$ olup $d_1(a_1,b_1)=0$ dır. d_1 X_1 üzerinde metrik olduğundan $a_1=b_1$ dir. Benzer şekilde, $d_2(a_2,b_2)=0$ dır. d_2 X_2 üzerinde metrik olduğundan $a_2=b_2$ dir. Sıralı ikililerin eşitliği tanımından $a=(a_1,a_2)=(b_1,b_2)=b$ dır.

Tersine, kabul edelim ki a=b olsun. Böylece $a_1=b_1$ ve $a_2=b_2$ olur. d_1 X_1 üzerinde ve d_2 X_2 üzerinde metrikler olduğundan $d_1(a_1,b_1)=0$ ve $d_2(a_2,b_2)=0$ dır. O halde $d(a,b)=\text{maks}\{d_1(a_1,b_1),d_2(a_2,b_2)\}=\text{maks}\{0\}=0$ olup d(a,b)=0 dır.

m_3) $a,b\in X$ olsun.

$$\begin{aligned} d(a,b) = d((a_1,b_1),(a_2,b_2)) &= \text{maks}\{d_1(a_1,b_1),d_2(a_2,b_2)\} \\ &= \text{maks}\{d_1(b_1,a_1),d_2(b_2,a_2)\} \\ &= d((b_1,b_2),(a_1,a_2)) = d(b,a). \end{aligned}$$

Benzer şekilde (m_4) aksiyomunun sağlandığı açıktır. Sonuç olarak d, $X= X_1\times X_2$ üzerinde bir metriktir.

5) (X,d) bir metrik uzay olsun. Her $x,y,z \in X$ için

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: Her $x,y,z \in X$ için

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) \qquad (1)$$

$$d(y, z) \leq d(y,x)+d(x,z)=d(x,y)+d(x,z) \qquad (2)$$

yazılır. (1) den $d(x,z)-d(y,z) \leq d(x,y)$ ve (2) den $d(y,z)-d(x,z) \leq d(x,y)$ elde edilir. Bilindiği gibi $a, b \in R$ için $a \leq b$ ve $-a \leq b$ ise, $|a| \leq b$ dır. O halde

$$|d(x,z)-d(z,y)| \leq d(x,y).$$

6) (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu gösterelim.

a) A, X de kapalıdır,

b) $\forall x \notin A$ için $d(x, A) > 0$ dır.

6) (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu gösterelim.

a) A, X de kapalıdır,

b) $\forall x \notin A$ için $d(x, A) > 0$ dır.

Çözüm:

a)$\Rightarrow$b) A kapalı ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda $X \setminus A$ açık ve $x \in X \setminus A$ dır. $X \setminus A$ açık olduğundan (tanım 1.7 den) $\exists\ r > 0$ var $\ni$ $B(x,r) \subset X \setminus A$ dır. Eğer $y \in A$ ise, $y \notin B(x,r)$ ve $d(x,y) > r$ olur. O halde $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} > r > 0$ elde edilir.

b)$\Rightarrow$a) $\forall x \notin A$ için $d(x,A) > 0$ olsun. $x \in X \setminus A$ ve $r = d(x,A)$ olmak üzere $B(x,r)$ açık yuvarını göz önüne alalım. Her $y \in A$ için $d(x,y) \geq d(x,A) > r$ olduğundan $B(x,r) \cap A = \varnothing$ olur. Yani, $y \in B(x,r) \subset X \setminus A$ dır. Böylece $X \setminus A$ açık, A ise kapalıdır.

7) (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $A \neq \emptyset$ olsun. Her $x,y \in X$ için $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $\forall a \in A$ için $d(x,a) \leq d(x,y)+d(y,a)$ dır. Böylece

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a): a \in A\} \leq d(x,y)+\inf\{d(y,a): a \in A\} = d(x,y)+d(y,A)$$

veya $d(x,A)-d(y,A) \leq d(x,y)$ elde edilir. Benzer şekilde $d(y,A)-d(x,A) \leq d(x,y)$ olduğu bulunur. Böylece $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$ elde edilir.

8) (X,d) bir metrik uzay, $A,B \subset X$ ve $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ olsun. Bu durumda $D=\{x\in X: d(x,A) < d(x,B)\}$ kümesinin açık olduğunu gösterelim.

Çözüm: $x_0\in D$ olsun. O halde $d(x_0,A) < d(x_0,B)$ dır. $d(x_0,B)- d(x_0,A) = r > 0$ diyelim ve $B(x_0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset D$ olduğunu gösterelim. $y\in B(x_0,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ dır. Diğer taraftan $a\in A$ için

$$d(y,a) \leq d(y,x_0)+d(x_0,a) \text{ veya } d(y,A) \leq d(y,x_0)+d(x_0,A)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} d(y,A) \leq d(y,x_0)+d(x_0,A) = d(y,x_0)+d(x_0,B)-r &\leq d(y,x_0)+d(x_0,y)+d(y,B)-r \\ &\leq \varepsilon/2+\varepsilon/2+d(y,B)-\varepsilon = d(y,B) \end{aligned}$$

olur. O halde $y\in D$ ve dolayısıyla $B(x_0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset D$ dır.

9) R^n de d öklid metriği ve d_2 de maksimum metrik olsun. Bu metriklerin denk olduklarını gösterelim.

Çözüm: Bu metriklerin denk olduğunu göstermek için tanım 1.18 e göre $x \in R^n$ ve $r > 0$ için $B_d(x,r) \subset B_{d_2}(x,r)$ ve $B_{d_2}(x,\frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B_d(x,r)$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için, $\forall x,y \in R^n$ iken $d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq \sqrt{n}\, d_2(x,y)$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Negatif olmayan reel sayıların her n-sıralı $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ için

$$\max\{a_i : 1 \leq i \leq n\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sqrt{n}\ \max\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$$

olduğunu gösterelim. i=1,2,...,n için $a_j = \max\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ olsun. Bu durumda $a_j = \sqrt{a_j} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ olur. Her i için $a_i \leq a_j$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq n\,.a_j^2$ bulunur. Bu da bize

$$\max\{a_i : 1 \leq i \leq n\} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sqrt{n}\ \max\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$$

ve dolayısıyla $d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq \sqrt{n}\ d_2(x,y)$ eşitsizliğini verir.

10) (X,d) bir metrik uzay olsun. X kümesi üzerinde öyle bir metrik tanımlayalım ki hem d metriğine denk ve hem de X in çapı (tanımlanan bu metriğe göre) küçük eşit bir olsun.

Çözüm: $\forall x,y \in X$ için d^* fonksiyonu $d^*(x,y) = \min\{1, d(x\ \ y)\}$ şeklinde tanımlansın. Kolayca gösterilebilir ki d^* fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Her $x,y \in X$ için $d^*(x,y) \leq 1$ olduğundan

$$d^*(X) = \sup\{d^*(x, y) : x, y \in X\} \leq 1$$

dır. Ayrıca $d(x,y) < 1$ olduğunda $d^*(x,y) = d(x, y)$ olduğu ve her $x \in X$,$0<r<1$ için $B_d(x,r) = B_{d^*}(x,r)$ olduğundan d^*, d ye denktir.

11) $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine göre $\forall x \in R$ ve $a \in R$ için $f(x)=x+a$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ öteleme fonksiyonunun bir izometri olduğunu gösterelim.

Çözüm : $\forall x, y \in R$ için

i) $d_1(f(x), f(y) = d(x, y)$ midir?

$$d_1(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |(x+a) - (y+a)| = |x - y| = d(x, y)$$

ii) f birebir midir?

$f(x) = f(y) \Rightarrow x+a = y+a \Rightarrow x = y$ olup f öteleme fonksiyonu birebirdir.

Sonuç olarak f öteleme fonksiyonu izometridir.

12) X ={a,b,c,d,e} kümesinin altkümelerinden oluşan aşağıdaki ailelerden hangisi X üzerinde bir topolojidir ?

i) $\tau_1=\{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

ii) $\tau_2=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

iii) $\tau_3=\{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d,e\}\}$

Çözüm: (i) t_1) $\emptyset, X \in \tau_1$ verilmiş.

t_2) τ_1 ait her sonlu elemanın kesişimi τ_1 e aittir. Gerçekten, Ø kümenin diğerleri ile kesişimi Ø olduğundan X in diğerleri ile kesişimi, kesişime giren kümeyi verdiğinden sonlu arakesit sağlanır. Ayrıca,

$$\{a\}\cap\{c,d\}=\emptyset, \{a\}\cap\{a,c,d\}=\{a\}, \{a\}\cap\{b,c,d,e\}=\emptyset$$

$$\{c,d\}\cap\{a,c,d\}=\{c,d\}, \{c,d\}\cap\{b,c,d,e\}=\{c,d\}$$

$$\{a,c,d\}\cap\{b,c,d,e\}=\{c,d\}, \{c,d\}\cap\{a,c,d\}\cap\{b,c,d,e\}=\{c,d\}$$

kümelerinin sonlu kesişimlerinin yine τ_1 ait olduğu görülmektedir.

t_3) Kolayca görülebilir ki keyfi birleşim özelliği de sağlanır. O halde τ_1, X üzerinde bir topolojidir.

ii) t_1) $\emptyset, X \in \tau_2$ verilmiş

t_2) Sonlu kesişimin sağlandığı görülür.

t_3) $\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,e\}\notin\tau_2$ dır. O halde τ_2 bir topoloji değildir.

iii) t_1) $\emptyset, X \in \tau_3$ verilmiş.

t_2) $\{a,c,d\}\cap\{a,b,d,e\}=\{a,d\}\notin\tau_3$ dır. O halde τ_3 bir topoloji değildir.

13) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\tau = \{\emptyset\} \cup \{ A \subset X : A^c \text{ sonlu} \}$ olsun. Gösterelim ki τ , X üzerinde bir topolojidir.

Çözüm: t_1) $\emptyset \in \tau$ verilmiş. $X^c = \emptyset$ ve $\emptyset$ sonlu olduğundan $X \in \tau$ dır.

t_2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$?

i) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ ise, (t_1) den $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ dır.

ii) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $i=1,2,\ldots,n$ için A_i^c sonlu olduğundan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c$ de sonludur. τ nun tanımından $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ dır.

t_3) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$?

i) $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ ise, (t_1) den $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

ii) $\bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\exists i_o \in I$ için $A_{i_o} \neq \emptyset$ dır. $A_{i_o} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c \subset A_i^c$ dır. A_i^c sonlu olduğundan $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c$ sonludur. O halde $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır. Böylece τ , X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye **sonlu tümleyenler topolojisi** denir.

14) R reel sayılar kümesi ve $\tau^* = \{\emptyset, R, A_\lambda = (\lambda, +\infty) : \lambda \in R\}$ olsun. Gösterelim ki τ^* R üzerinde bir topolojidir.

Çözüm : (t_1) $\emptyset, R \in \tau^*$ verilmiş.

t_2) Herhangi $\{A_\lambda\}_{\lambda \in J} \subset \tau^*$(J, R nın sonlu bir alt ailesi) için $\bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda \in \tau^*$?

J ailesi sonlu olduğundan max (J) = j_o olsun. Bu durumda $\bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda = A_{J_o}$ olur. τ^* ın tanımında $\bigcap_{\lambda \in J} A_\lambda \in \tau^*$ dır.

t_3) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset \tau^*$ için $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau^*$?

$I \subset R$ indis kümesi alttan sınırlı ise, Inf (I)=λ_o dır. Bu durumda $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda = A_{\lambda_o} \in \tau^*$ dır.

$I \subset R$ indis kümesi alttan sınırlı değil ise, Inf (I)= $-\infty$ dır. Bu durumda $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda = R \in \tau^*$ dir. O halde τ^*, R üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye R nın **sağışın topolojisi** denir.

15) $\{\tau_i : i\in I\}$ ailesi X üzerinde topolojilerin herhangi bir ailesi, $\tau' = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ ve $\tau'' = \bigcup_{i\in I} \tau_i$ olsun. Bu durumda

i) τ' bir topoloji mi ?

ii) τ'' bir topoloji mi ?

Çözüm: (i) t_1) $\emptyset, X \in \tau'$?

Her $i\in I$ için τ_i topoloji olduğundan $\emptyset, X\in\tau_i$ dır. O halde

$$\emptyset, X \in \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau' \text{ dır.}$$

t_2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau'$ için $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau'$?

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \bigcap_{i\in I} \tau_i$ olduğundan $\forall i\in I$ için $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau_i$ dir. τ_i ler topoloji olduğundan $\forall i\in I$ için $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in\tau_i$ dır. O halde $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau'$ dır.

t_3) $\{A_j\}_{j\in J} \subset \tau'$ için $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau'$?

Her $j\in J$ için $A_j \in \bigcap_{i\in I} \tau_i$ olduğundan $\forall i\in I$ için $A_j \in \tau_i$ dır. τ_i ler topoloji olduğundan $\{A_j\}_{j\in J} \in \tau_i$ ve $\bigcup_{j\in J} A_j \in\tau_i$, $i\in I$ dır. O halde $\bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau'$ dır. Böylece $\tau' = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

ii) $\tau'' = \bigcup_{i\in I} \tau_i$ ailesi genelde topoloji değildir. τ'' nın topoloji olmadığına dair bir aksi örnek verelim:

$X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{c\}\}$ iki topoloji ve $\tau'' = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c\}\}$ olsun. Bu durumda τ'', X üzerinde bir topoloji değildir. Çünkü $\{a,b\}, \{c\} \in \tau'' = \tau_1 \cup \tau_2$ olmasına rağmen, $\{a,b\} \cup \{c\} = \{a,b,c\} \notin \tau''$ dır.

16) X={a,b,c,d,e} bir küme ve

$$\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji olsun.

i) $b\in X$ noktasının komşuluklar ailesi olan N(b) yi bulalım.

ii) $c\in X$ noktasının komşuluklar ailesi olan N(c) yi bulalım.

Çözüm: i) b noktasının komşulukları , b noktasını içeren açıklarla , bu açıkları içinde bulunduran X in altkümeleridir. b noktasını içinde bulunduran açıklar ,

$$X,\ \{a,b\},\ \{a,b,c,d\},\{a,b,e\}$$

dır. X açığını içinde bulunduran açık kendisidir. {a,b} açığını içinde bulunduran X in altkümeleri,

$$\{a,b\},\ \{a,b,c\},\{a,b,c,d\},\{a,b,d\},\ \{a,b,d,e\},\{a,b,e\},\{a,b,c,e\},X$$

dır. {a,b,c,d} açığını içinde bulunduran X in altkümeleri ,

$$\{a,b,c,d\},X$$

dır. {a,b,e} açığını içinde bulunduran X in altkümeleri ,

$$\{a,b,e\},\ \{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},X$$

dır .O halde

$$N(b)=\{X,\ \{a,b\},\ \{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\ \{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\}\}$$

dır.

ii) c noktasının komşulukları , c noktasını içeren açıklarla, bu açıkları içinde bulunduran X in altkümeleridir.

c noktasını içinde bulunduran açıklar,

$$X,\ \{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\}$$

dır.

X açığını içinde bulunduran açık kendisidir. {a,c,d} açığını içinde bulunduran X in altkümeleri,

$$\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,c,d,e\},X$$

dır. {a,b,c,d} açığını içinde bulunduran X in altkümeleri,

$$\{a,b,c,d\},X$$

dır. O halde,

$$N(c) = \{\ \{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\ \{a,c,d,e\},X\ \}.$$

17) (X,τ) topolojik uzay , $x\in X$ herhangi bir nokta ve $\mathcal{E}(x)$ de x noktasının komşuluklar tabanı olsun.Gösterelim ki $\mathcal{E}(x)$ aşağıdaki şartları sağlar:

i) $\mathcal{E}(x)\neq \emptyset$ ve her $E\in\mathcal{E}(x)$ için $x\in E$,

ii) Her $E_1, E_2 \in\mathcal{E}(x)$ için $\exists E_3\in\mathcal{E}(x)$ var $\ni E_3\subset E_1\cap E_2$.

iii) Her $E\in\mathcal{E}(x)$ için $\exists E_0\in\mathcal{E}(x)$ var $\ni$ her $y\in E_0$ için $U\subset E$ olacak şekilde $U\in\mathcal{E}(x)$ vardır.

Çözüm: (i) ve (ii) özellikleri komşuluk ve komşuluklar tabanı tanımında kolayca gösterilebilir.

iii) Herhangi bir $E\in\mathcal{E}(x)$ için $\mathcal{E}(x)\subset\mathcal{N}(x)$ olduğundan $E\in\mathcal{N}(x)$ dır. Teorem 2.11 (N_4) den her $y\in E_0$ için $E\in\mathcal{N}(y)$ olacak şekilde $E_0\in\mathcal{N}(x)$ vardır. Tanım 2.14 den $U\subset E_0$ olacak şekilde $U\in\mathcal{E}(x)$ vardır. Her $y\in U$ için $y\in E_0$, $E\in\mathcal{N}(y)$ olduğu ve Teorem 2.11 (N_1) den $y\in E$ olur. O halde $U\subset E$ bulunur.

18) (R,d) alışılmış topolojik uzay olsun. Bu durumda

i) N doğal sayılar kümesinin değme noktalarını ,

ii) N doğal sayılar kümesinin yığılma noktalarını,

iii) [a,b) aralığının yığılma noktalarının kümesini bulalım.

Çözüm: (i) N doğal sayılar her elemanı , N nın bir değme noktasıdır. Çünkü $\forall n \in N$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $(n-\varepsilon, n+\varepsilon) \cap N \neq \emptyset$ dır.

ii) N nın yığılma noktalarının kümesi Ø dır. Çünkü $\forall r \in R$ reel sayı ve $\forall \varepsilon > 0$ için $((r-\varepsilon, r+\varepsilon) \setminus \{r\}) \cap N = \emptyset$ dır.

iii) [a,b) aralığının $\forall p \in [a,b]$ için p noktasını içeren her açık aralık veya komşuluk p den başka [a,b) aralığına ait noktaları içerdiğinden [a,b] aralığının her noktası, [a,b) kümesinin bir yığılma noktasıdır. O halde [a,b) nın yığılma noktalarının kümesi [a,b] kapalı aralığıdır.

19) $X=\{a,b,c,d,e\}$ bir küme ve

$$\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji olsun. Bu topolojiye göre ,

i) X in kapalı kümelerini,

ii) $\{a,c\}$, $\{d\}$ ve $\{b,d,e\}$ kümelerin kapanışlarını bulalım.

iii) (ii) deki kümelerden hangisi X de yoğundur?

Çözüm: (i) τ nun elemanlarının tümleyenleri X in kapalı alt kümeleridir. O halde

$$\{X,\emptyset,\{b,c,d,e\},\{c,d,e\},\{b,e\},\{e\},\{c,d\}\}$$

dır.

ii) Bir topolojik uzayda herhangi bir A kümesinin kapanışı, A kümesini kapsayan kapalıların ara kesitine eşittir; yani $\bar{A}=\bigcap_{K\in\kappa_A} K$ dır.

$\{a,c\}$ kümesini kapsayan tek kapalı küme X dır. O halde

$$\overline{\{a,c\}}=X$$

dır.

$\{d\}$ kümesini kapsayan kapalı kümeler;

$$X,\{b,c,d,e\},\{c,d,e\},\{c,d\}$$

dır. Böylece

$$\overline{\{d\}}=X\cap\{b,c,d,e\}\cap\{c,d,e\}\cap\{c,d\}=\{c,d\}.$$

$\{b,d,e\}$ kümesini kapsayan kapalılar,

$$X,\ \{b,c,d,e\},$$

dır. Böylece

$$\overline{\{b,d,e\}}=X\cap\{b,c,d,e\}=\{b,c,d,e\}$$

dır.

iii) $\{a,c\}$ kümesi X de yoğundur. Çünkü $\overline{\{a,c\}}=X$ dır.

20) (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B \subset X$ olsun.

i) B kapalı ve $A \subset B \subset A \cup A'$ ise $\bar{A} = B$ midir ?

ii) B açık ve $\mathring{A} \subset B \subset A$ ise, $\mathring{A} = B$ midir ?

Çözüm: i) B kapalı $\Rightarrow B = \bar{B}$ ve $A \cup A' = \bar{A}$ dır. Böylece

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow B \subset \bar{A} \\ A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} = B \Rightarrow \bar{A} \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} = B\,.$$

ii) B açık $\Rightarrow \mathring{B} = B$ ve $B \subset A \Rightarrow \mathring{B} \subset \mathring{A} \Rightarrow B \subset \mathring{A}$. Ayrıca $\mathring{A} \subset B \subset A \Rightarrow \mathring{A} \subset B$ dir. O halde

$$\mathring{A} = B$$

21) (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıda ki ifadeleri gösterelim:

i) A açık ise, $A \subset \mathring{\overline{A}}$; A kapalı ise $\overline{\mathring{A}} \subset A$,

ii) $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$,

iii) $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$,

iv) $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$,

v) $\partial \overline{A} \subset \partial A$, $\partial \mathring{A} \subset \partial A$ dır.

Çözüm: i) A açık $\Rightarrow A = \mathring{A}$ dır. $A \subset X$ için $A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \Rightarrow A \subset \mathring{\overline{A}}$ olur.

A kapalı $\Rightarrow A = \overline{A}$ dır. $A \subset X$ için $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset A$ olur.

ii) $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \mathring{\overline{A}}$ dır. $A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$ dır.

iii) $A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$ dır.

iv) $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$. Ayrıca $\overline{\mathring{A}}$ kümesi içini kapsar, yani $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}}$ dır. $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ olduğu da göz önüne alınırsa , $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ bulunur.

v) $\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \setminus \mathring{\overline{A}} = \overline{A} \setminus \mathring{\overline{A}}$ dır. $A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$, $\overline{A}$ a göre tümleme alınırsa, $\overline{A} \setminus \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A}$ bulunur. Bu da $\partial \overline{A} \subset \partial A$ olması demektir.

$\partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{\mathring{A}} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A}$, $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ olduğundan $\overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A} \Rightarrow \partial \mathring{A} \subset \partial A$ olur.

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Uygulama 1

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 13