ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Topolojik Yapı Oluşturma IV

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 12

Teorem 4.5. (X,τ) bir topolojik uzay ve (A,τ_A) X in alt uzayı olsun. Bu durumda $K'\subset A$ alt kümesinin τ_A ya göre kapalı olması için gerek ve yeter şart $K\subset X$ alt kümesi τ ya göre kapalı olmak üzere $K' = A\cap K$ olmasıdır.

İspat: $K'\subset A$ alt kümesi τ_A ya göre kapalı olsun. Tanım 2.8 den $K'^c = A\backslash K'$ kümesi τ_A ya göre açıktır. τ_A nın tanımından $\exists W\in\tau$ var ve $K'^c = A\cap W$ 'dır. Bu eşitliğin tekrar A 'ya göre tümleyeni alınırsa,

$$K' = (A\cap W)^c_A = A^c_A \cup W^c_A = \emptyset\cup(A\cap W^c_X) = A\cap W^c_X$$

dır. W^c_X kümesi kapalı olduğundan $K = W^c_X$ alınabilir. O halde

$$K' = A\cap K$$

olur.

Tersine olarak $K\subset X$ alt kümesi τ ya göre kapalı olmak üzere $K' = A\cap K$ olsun. K' nün τ_A ya göre kapalı olduğunu göstermek için $K'^c_A = A\backslash K'$ kümesinin τ_A ya göre açık olduğunu gösterelim:

$$K' = A\cap K \Rightarrow K'^c_A = (A\cap K)^c_A = A^c_A \cup K^c_A = \emptyset\cup(A\cap K^c_X) = A\cap K^c_X$$

$K^c_X\subset X$, τ ya göre açık olması Teorem 4.1 den K'^c_A τ_A ya göre açıktır. O halde K', τ_A ya göre kapalıdır.

Örnek 4.6. $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

ve $A = \{a,c,e\}$ olsun. A kümesi üzerindeki τ_A topolojisine göre A nın kapalılarını bulalım.

Çözüm iki yoldan yapılabilir:

I.Yol: τ nun kapalılar ailesi

$$\kappa = \{X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \{c,d\}\}$$

dır. τ_A ya göre kapalılar ailesi ise,

$$A \cap X = A\ ,\ A \cap \{b,c,d,e\} = \{c,e\}\ ,\ A \cap \{b,e\} = \{e\}\ ,\ A \cap \{c,d\} = \{c\}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset\ ,\ A \cap \{c,d,e\} = \{c,e\}\ ,\ A \cap \{e\} = \{e\}$$

dır. $\kappa_A = \{A, \emptyset, \{c,e\}, \{e\}, \{c\}\}$ olarak bulunur.

II. Yol: Örnek 4.3 'de $\tau_A = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a,c\}, \{a,e\}\}$ olarak bulunmuştur. O halde τ_A nın elemanlarının A ya göre tümleyenleri alınırsa,

$$\kappa_A = \{A, \emptyset, \{c,e\}, \{e\}, \{c\}\}$$

olarak bulunur.

Örnekte görüldüğü gibi τ_A ya göre kapalı olan kümeler, τ ya göre kapalı değildir. τ_A ya göre kapalı bir küme τ ya göre kapalı olması için gerek ve yeter şartın A nın τ ya göre kapalı olması gerektiği kolayca gösterilebilir.

İspat: $N_A(x)$ ailesinin $x\in A$ noktasının komşuluk aksiyomlarını sağladığını göstermek için (N_1), (N_2), (N_3) ve (N_4) şartlarını (teorem 2.11) gösterelim:

N_1) $\forall N_A\in N_A(x)$ için $N_A = A\cap N$ ve $x\in A$ ve $x\in N$ olmasından $x\in N_A$ dır.

N_2) $\forall N_A\in N_A(x)$ ve $N_A \subset M$ olsun. $N_A\in N_A(x)$ olması komşuluk tanımından $\exists U_A\in\tau_A$ var $\ni U_A\subset N_A$ dır. $N_A\subset M$ ve $U_A\subset N_A\subset M$ den $M\in N_A(x)$ dır.

N_3) Herhangi N_A, $N'_A\in N_A(x)$ olsun. $N_A\in N_A(x) \Rightarrow \exists U_A\in\tau_A \ni U_A\subset N_A$ ve $N'_A\in N_A(x) \Rightarrow \exists U'_A\in\tau_A \ni U'_A \subset N'_A$ dır. (t_2) 'den $U'_A\cap U_A\in\tau_A$ ve $U_A\cap U'_A\subset N_A\cap N'_A$ olmasından $N_A\cap N'_A\in N_A(x)$ dır.

N_4) $\forall N_A\in N_A(x)$ için $x\in U_A \subset N_A$ olacak şekilde $U_A\in\tau_A$ açık kümesi vardır. Tanım 2.10 'dan U_A içindeki her noktanın komşuluğudur, yani $\forall y\in U_A$ için $U_A\in N_A(y)$ dır. $U_A\subset N_A$ olması ve (N_2) den $N_A\in N_A(y)$ dır.

(A,τ_A) bir topolojik uzay olduğundan A nın boştan farklı herhangi bir B alt kümesinin değme noktası, yığılma noktası, kapanış noktası, iç noktası, dış noktası
II. Bölümdeki gibi tanımlanabilir. Hatta B nin kapanış, içi, dışı, sınırı, yoğun olması, hiçbir yerde yoğun olmaması da tanımlanabilir. Ancak üst uzayda tanımlanan bu kavramlarla yakın ilişkisi olduğunu ifade ettiğimizden ilişkileri araştırmaya devam edelim.

Teorem 4.10. (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve $B\subset A$ olsun. B nin τ ya göre kapanışı $\overline{B}_X$, τ_A ya göre kapanışı $\overline{B}_A$ olmak üzere

$$\overline{B}_A = A\cap\overline{B}_X .$$

İspat: İspatı iki yoldan yapalım:

I. Yol: $\forall x\in\overline{B}_A$ olsun. x noktası, B kümesinin τ_A ya göre bir değme noktası olduğundan $\forall N_A\in N_A(x)$ için $B\cap N_A \neq \emptyset$ dır. Teorem 4.9 dan $N_A = A\cap N$ olduğundan $x\in A\cap N$ dır. O halde

$$(A\cap N)\cap B = N\cap(A\cap B) = N\cap B \neq \emptyset \Rightarrow x\in\overline{B}_X$$

ve $x\in A$ olmasından $x\in A\cap\overline{B}_X$ bulunur. Böylece

$$\overline{B}_A \subset A\cap\overline{B}_X \qquad (1)$$

olur.

Tersine olarak $\forall x\in A\cap\overline{B}_X$ olsun. Bu durumda $x\in A$ ve $x\in\overline{B}_X$ dır. B nin τ ya göre değme noktası tanımından (Tanım 2.18) $\forall x\in N\in N(x)$ için $N\cap B \neq \emptyset$ dır. Buradan $(N\cap B)\cap A = (N\cap A)\cap B = N_A\cap B \neq \emptyset \Rightarrow x\in\overline{B}_A$ bulunur. Böylece

$$A\cap\overline{B}_X \subset \overline{B}_A \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $\overline{B}_A = A\cap\overline{B}_X$ elde edilir.

Teorem 4.10. (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve $B\subset A$ olsun. B nin τ ya göre kapanışı $\overline{B}_X$, τ_A ya göre kapanışı $\overline{B}_A$ olmak üzere

$$\overline{B}_A = A\cap\overline{B}_X .$$

İspat: İspatı iki yoldan yapalım:

I. Yol: $\forall x\in\overline{B}_A$ olsun. x noktası, B kümesinin τ_A ya göre bir değme noktası olduğundan $\forall N_A\in N_A(x)$ için $B\cap N_A \neq \emptyset$ dır. Teorem 4.9 dan $N_A = A\cap N$ olduğundan $x\in A\cap N$ dır. O halde

$$(A\cap N)\cap B = N\cap(A\cap B) = N\cap B \neq \emptyset \Rightarrow x\in\overline{B}_X$$

ve $x\in A$ olmasından $x\in A\cap\overline{B}_X$ bulunur. Böylece

$$\overline{B}_A \subset A\cap\overline{B}_X \qquad (1)$$

olur.

Tersine olarak $\forall x\in A\cap\overline{B}_X$ olsun. Bu durumda $x\in A$ ve $x\in\overline{B}_X$ dır. B nin τ ya göre değme noktası tanımından (Tanım 2.18) $\forall x\in N\in N(x)$ için $N\cap B \neq \emptyset$ dır. Buradan $(N\cap B)\cap A = (N\cap A)\cap B = N_A\cap B \neq \emptyset \Rightarrow x\in\overline{B}_A$ bulunur. Böylece

$$A\cap\overline{B}_X \subset \overline{B}_A \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $\overline{B}_A = A\cap\overline{B}_X$ elde edilir.

II. Yol: $\overline{B}_X$, X uzayında kapalı ve $B \subset \overline{B}_X$ dir. Bu durumda Teorem 4.5 den $A \cap \overline{B}_X$ kümesi A da kapalı ve $B \subset A \cap \overline{B}_X$ dır. B yi kapsayan en dar küme B nin $\overline{B}_A$ kapanışı olduğundan $\overline{B}_A \subset A \cap \overline{B}_X$ dır.

Diğer taraftan $\overline{B}_A$, A nın kapalı bir alt kümesi, Teorem 4.5 den $\overline{B}_A = A \cap K$ olacak şekilde X de bir K kapalı kümesi vardır. $B \subset K$ ve $\overline{B}_X \subset K$ olmasından $A \cap \overline{B}_X \subset A \cap K = \overline{B}_A$ dır. Böylece $\overline{B}_A = A \cap \overline{B}_X$ bulunur.

Teorem 4.11. (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve $B \subset A$ olsun. B nin τ ya göre yığılma noktalarının kümesi B'_X, τ_A ya göre yığılma noktalarının kümesi B'_A olmak üzere

$$B'_A = A \cap B'_X$$

dır.

İspat: Her yığılma noktası aynı zamanda değme noktası olması ve Teorem 4.10 dan ispat açıktır.

Bu teoremlerden sonra alt uzayda verilen bir kümenin içi için benzer özelliğin var olabileceği düşünülebilir. Aksi bir örnekle, (X,τ) topolojik uzayının (A,τ_A) alt uzayının herhangi bir $B \subset A$ alt kümenin τ ya göre içi $\overset{o}{B}_X$, τ_A ya göre içi $\overset{o}{B}_A$ olmak üzere

$$\overset{o}{B}_A \neq \overset{o}{B}_X \cap A$$

olduğunu gösterelim:

Örnek 4.12. (R^2,τ) alışılmış topolojik uzay, $A = \{(x,y): y = 0, x \in R\}$ reel ekseni R^2 nin bir alt kümesi ve (A,τ_A) alt uzayı olsun. A kümesi τ_A topolojisine göre açık olduğundan içine eşittir (teorem 2.44 (iv)), yani $A = \mathring{A}_A$ dır. Ancak A kümesinin τ ya göre içi boştur. Yani $\mathring{A}_X = \emptyset$ dır. Çünkü A, τ topolojisinin hiç bir açığını kapsamaz. O halde

$$A = \mathring{A}_A \neq A \cap \mathring{A}_X = A \cap \emptyset = \emptyset$$

Bu örnekten şu sonucu çıkarmak mümkündür. A nın τ_A ya göre açık olduğunu, yani $A = \mathring{A}_A$ ve A nın τ_A ya göre kapanışı da $\overline{A}_A = A$ dır. Bu durumda, τ_A ya göre A nın sınırı ∂A_A olmak üzere,

$$\partial A_A = \overline{A}_A \setminus \mathring{A}_A = A \setminus A = \emptyset$$

dır. A nın τ ya göre sınırı ∂A_X olmak üzere, $\partial A_X \neq \emptyset$ dır. Böylece

$$\partial A_A \neq A \cap \partial A_X$$

dır. Genel olarak yazarsak, $B \subset A$ olmak üzere $\partial B_A \neq A \cap \partial B_X$ dır.

Teorem 4.13. (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve $B \subset A$ olsun. Bu durumda B kümesinin τ_A ya göre yoğun olması için gerek ve yeter şart A ile B nin τ ya göre kapanışlarının eşit olmasıdır. Yani

$$\overline{B}_A = A \Leftrightarrow \overline{B}_X = \overline{A}_X$$

dır.

İspat: B kümesi τ_A ya göre A da yoğun, yani $\overline{B}_A = A$ olsun. $\overline{B}_A = A \cap \overline{B}_X$ olduğundan $A \subset \overline{B}_X$ 'dır. Teorem 2.30 (v) den $\overline{A}_X \subset \overline{B}_X$ dır. Diğer taraftan $B \subset A$ olduğundan $\overline{B}_X \subset \overline{A}_X$ dır. O halde $\overline{A}_X = \overline{B}_X$ bulunur.

Tersine olarak $\overline{A}_X = \overline{B}_X$ olsun. $\overline{B}_A = \overline{B}_X \cap A$ ifadesinde $\overline{B}_X$ yerine $\overline{A}_X$ konulur ve $A \subset \overline{A}_X$ olması da göz önüne alınırsa $\overline{B}_A = \overline{A}_X \cap A = A$ bulunur.

Örnek 4.14. (R,τ) alışılmış topolojik uzay, $A = (0,1)$ olmak üzere (A,τ_A) alt uzay ve $B = \{x: 0 < x < 1, x \in Q\}$ olsun. B kümesinin τ_A 'ya göre kapanışı, yani $\overline{B}_A = (0,1)$ 'dır. O halde B kümesi A nın topolojisine göre yoğundur. Fakat B nin R deki topolojiye göre kapanışı $\overline{B}_R = [0,1]$ dır. Bu örnek teorem 4.10 u doğrulamakla birlikte, alt uzayda yoğun olan bir kümenin üst uzayda yoğun olmadığını göstermektedir.

Bir küme üzerindeki topoloji ile, bu topolojinin tabanı ve alt tabanı arasındaki ilişki II. ve III. Bölümlerde ifade edilmişti. Alt uzayın topolojisinin elemanları, üst uzayın topolojisinin elemanları ile belirlendiğine göre (teorem 4.1), üst uzayın topolojisinin tabanı, alt uzayın topolojisinin tabanını veya üst uzayın topolojisinin alt tabanı, alt uzayın topolojisinin alt tabanını belirler mi? Belirlediğini aşağıdaki teoremler ifade etmektedir.

Teorem 4.15. (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve β, τ için bir taban olsun. Bu durumda

$$\beta_A = \{B_A = A \cap B : B \in \beta\}$$

ailesi, τ_A için bir tabandır.

İspat: $\forall W' \in \tau_A$ için $W' = W \cap A$ olacak şekilde $W \in \tau$ olması ve β ailesi τ için bir taban olduğundan $\exists \theta \subset \beta$ alt ailesi var $\ni$ $W = \bigcup_{B \in \theta} B$ dır. Buradan

$$W' = W \cap A = \bigcup_{B \in \theta} B \cap A = \bigcup_{B \in \theta} (B \cap A) = \bigcup_{B_A \in \theta_A} B_A \,,\ \theta_A \subset \beta_A$$

olur. O halde τ_A nın her bir elemanı, β_A nın elemanlarının bazı birleşimleri şeklinde yazılmaktadır. Böylece β_A , τ_A için bir tabandır.

Ayrıca, β_A ailesinin (b_1) ve (b_2) özelliklerini sağladığı kolayca gösterilebilir.

Örnek 4.16. $X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a,b,c,d\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{c\}, \{d\}\}$, bu topoloji için β tabanı $\beta = \{\emptyset, X, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{c\}, \{d\}\}$
ve $A = \{a,c,d\} \subset X$ olsun. A üzerindeki τ_A topolojisini bulalım.

Çözümü iki yoldan yapalım. Birincisi β_A ailesini oluşturarak A üzerine topoloji koyalım. İkincisini de teorem 4.1 i kullanarak yapalım.

I. Yol: $\beta_A = \{B_A = A \cap B : B \in \beta\}$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \;,\; A \cap \{a,b,c\} = \{a,c\} \;,\; A \cap \{d,e\} = \{d\},\; A \cap \{d\} = \{d\}$$

$$A \cap X = A \;,\; A \cap \{c,d\} = \{c,d\} \;,\; A \cap \{c\} = \{c\}$$

$$\beta_A = \{\emptyset, A, \{a,c\}, \{c,d\}, \{c\}, \{d\}\}$$

b_1) $A = \bigcup_{B_A \in \beta_A} B_A$ olduğu açık.

b_2) β_A 'ya ait herhangi iki elemanın arakesitinin kapsadığı eleman da yine β_A ya ait olduğu açık, örneğin, $\{a,c\}, \{c,d\} \in \beta_A$ için

$$\{a,c\} \cap \{c,d\} = \{c\} \in \beta_A$$

dır. O halde

$$\tau_A = \{\emptyset, A, \{a,c\}, \{c,d\}, \{c\}, \{d\}\}$$

bulunur.

II. Yol: $\tau_A = \{W' = A \cap W : W \in \tau\}$

$A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \{a,b,c,d\} = A$, $A \cap \{a,b,c\} = \{a,c\}$, $A \cap \{d,e\} = \{d\}$, $A \cap \{d\} = \{d\}$

$A \cap X = A$, $A \cap \{c,d,e\} = \{c,d\}$, $A \cap \{c,d\} = \{c,d\}$, $A \cap \{c\} = \{c\}$

$$\tau_A = \{\emptyset, A, \{a,c\}, \{c,d\}, \{c\}, \{d\}\}$$

bulunur.

Teorem 4.17. (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve fl, τ için bir alt taban olsun. Bu durumda

$$\text{fl}_A = \{V_A = A\cap V : V\in \text{fl}\}$$

ailesi τ_A için bir alt tabandır.

İspat: fl ailesi τ için bir alt taban olduğundan tanım 2.69 dan

$$\beta = \{ \bigcap_{V\in\varphi} V : \varphi \subset \text{fl} \text{ sonlu} \}$$

ailesi τ için bir tabandır. O halde $\forall W\in\tau$ için $\exists\ \theta \subset \beta$ var $\ni$ $W = \bigcup_{B\in\theta} B = \bigcup_{B\in\theta} \bigcap_{V\in\varphi} V$ dır. Diğer taraftan τ_A nın tanımından $W\cap A\in\tau_A$ dır. O halde

$$W\cap A = \bigcup_{B\in\theta} \bigcap_{V\in\varphi} V\cap A = \bigcup_{B\in\theta} \bigcap_{V\in\varphi}(V\cap A) = \bigcup_{B_A\in\theta_A} \bigcap_{V_A\in\varphi_A} V_A\ ,\ \varphi_A\subset \text{fl}_A \text{ sonlu},\ \theta_A\subset \beta_A$$

olur. Böylece τ_A ya ait elemanlar fl_A nın elemanlarının sonlu kesişimlerinin birleşimi olarak yazılmaktadır. fl_A , τ_A için bir alt tabandır.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Topolojik Yapı Oluşturma IV

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 12