



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş
Topolojik Yapı Oluşturma III

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 11

Teorem 3.12 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\beta' \subset P(X)$ ailesi aşağıdaki şartları sağlasın:

$$b_1) X = \bigcup_{B \in \beta'} B,$$

$b_2)$ Herhangi $B_1, B_2 \in \beta'$ ve $\forall p \in B_1 \cap B_2$ için $\exists B_p \in \beta'$ var $\ni p \in B_p \subset B_1 \cap B_2$.

Bu durumda β' ailesi, X kümesi üzerinde bir τ' topolojisini üretir.

İspat: $\tau' = \{ \bigcup_{B \in \theta'} B : \theta' \subset \beta' \}$ şeklinde tanımlanan τ' ailesinin topoloji aksiyomlarını sağladığını gösterelim:

t₁) $\emptyset, X \in \tau'$?

β' ailesinde birleşim işlemi tanımlı olduğundan $\bigcup_{B \in \emptyset} B = \emptyset$ dır. O halde $\emptyset \in \tau'$ dır. Ayrıca (b₁) özelliğinden $X \in \tau'$ dır.

t₂) İspatı herhangi $A_1, A_2 \in \tau'$ için yapalım. Sonlu sayıda ki τ' nün elemanları için de tüme varımla kolayca gösterilir.

$A_1, A_2 \in \tau'$ için $A_1 \cap A_2 \in \tau'$?

$A_1 \in \tau' \Rightarrow \exists \theta_1 \subset \beta' \text{ var } \ni A_1 = \bigcup_{B_1 \in \theta_1} B_1 \text{ ve } A_2 \in \tau' \Rightarrow \exists \theta_2 \subset \beta' \text{ var } \ni A_2 = \bigcup_{B_2 \in \theta_2} B_2$ dır.

Buradan

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{B_1 \in \theta_1} B_1 \right) \cap \left(\bigcup_{B_2 \in \theta_2} B_2 \right) = \bigcup_{B_1 \in \theta_1} \bigcup_{B_2 \in \theta_2} (B_1 \cap B_2)$$

dır. (b₂) den $B_1 \cap B_2 \in \beta'$ olduğundan $A_1 \cap A_2 \in \tau'$ bulunur.

t₃) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau'$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau'$?

$\forall i \in I$ için $A_i \in \tau'$ olması ve τ' nün tanımından $\exists \theta_i \subset \beta' \text{ var } \ni A_i = \bigcup_{B_i \in \theta_i} B_i$ dır. O

halde

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{B_i \in \theta_i} B_i \right) = \bigcup_{B_i \in \theta_i} \bigcup_{i \in I} B_i$$

oldüğundan $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau'$ bulunur. Böylece τ' ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Sonuç 3.13 teorem 3.11 ve tanım 2.62 den β' ailesi τ' topolojisi için bir topoloji tabanıdır. Böylece τ' topolojisi daha az sayıda elemandan hareketle oluşturulmuş oldu.

Sonuç 3.14 Teorem 2.64 de verilen β ailesi için teorem 3.12 göz önüne alındığında, β ailesinin X üzerindeki bir topolojiye taban olması için gerek ve yeter şart (b_1) ve (b_2) özelliklerini sağlamasıdır.

Örnek 3.15 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin açık-kapalı $\beta = \{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ailesi (b_1) ve (b_2) özelliğini sağlar. Gerçekten, $\mathbb{R}$ nın her bir elamanı açık-kapalı bir aralığına ait olduğundan $\mathbb{R}$, β nın elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir. Böylece (b_1) özelliği sağlanmış olur.

Herhangi $(a,b], (c,d] \in \beta$ için $(a,b] \cap (c,d]$ arakesiti boş ise, (b_1) sağlandığından $(a,b] \cap (c,d] \in \beta$ dır. Bu şekli ile (b_2) özelliği sağlanır. Eğer

$$a < c < b < d \Rightarrow (a,b] \cap (c,d] = (c,b]$$

dır. $(c,b]$ açık-kapalı olduğundan $(a,b] \cap (c,d] \in \beta$ dır. Bu durumda da (b_2) sağlanır. O halde teorem 3.12 den β ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\tau = \left\{ \bigcup_{(a,b] \in \theta} (a,b] : \theta \subset \beta \right\}$$

topolojisini üretir. Bu topolojiye $\mathbb{R}$ nın **üst limit topolojisi** denir.

Benzer şekilde $\beta' = \{[a,b): a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde, **$\mathbb{R}$ nın alt limit topolojisini** üretir.

Boştan farklı bir X kümesinin altkümelerinin her ailesi, (b_1) ve (b_2) özelliklerini sağlaması beklenemez. Bu nedenle X üzerindeki hangi topolojide, verilen kümeler açık veya değildir? sorusu akla gelir. Bunun yanında verilen kümelerin açık olacağı topoloji tek değildir. Örneğin, $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış topolojideki açık aralıklar, $\mathbb{R}$ üzerindeki ayrık topolojide de açıktır.

Şimdi yukarıdaki soruya hem açıklık getirmek ve hem de $P(X)$ ın herhangi alt ailesi, X üzerinde en az sayıda açık kümeye sahip olan τ' topolojisini üretir? Bir başka deyimle, teorem 3.12 de ki β' ailesinden daha az sayıda eleman içeren $P(X)$ ailesinin bir alt ailesi ile X üzerinde bir topoloji üretilebilir mi? sorusuna cevap olacak nitelikteki aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.16 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{f}' \subset P(X)$ bir alt aile, öyle ki $X = \bigcup \{A : A \in \mathcal{f}'\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{f}'$ ailesinin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu kümelerin β' ailesi (b_1) ve (b_2) özelliklerini sağlar.

İspat: $\beta' = \{ \bigcap_{A \in \varphi'} A : \varphi' \subset \mathcal{f}' \text{ sonlu} \}$ ailesinin (b_1) ve (b_2) özelliklerinin sağladığını gösterelim:

$b_1)$ $\mathcal{f}'$ ailesinde kesişim işlemi tanımlı olduğundan $\mathcal{f}'$ nün boş alt ailesi üzerinden kesişimi

$$\bigcap_{A \in \emptyset} A = X \Rightarrow \bigcup_{B \in \beta'} \left(\bigcap_{A \in \emptyset} A \right) = X$$

dır.

$b_2)$ Herhangi $B_1, B_2 \in \beta'$ için, β' tanımından $B_1 = \bigcap_{A_1 \in \varphi_1} A_1$ ve $B_2 = \bigcap_{A_2 \in \varphi_2} A_2$ olacak şekilde sonlu $\varphi_1, \varphi_2 \subset \mathcal{f}'$ vardır. O halde $B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{A_1 \in \varphi_1} A_1 \right) \cap \left(\bigcap_{A_2 \in \varphi_2} A_2 \right) =$

$\bigcap_{A_1 \in \varphi_1} \bigcap_{A_2 \in \varphi_2} (A_1 \cap A_2)$ dır. Böylece $B_1 \cap B_2 \in \beta'$ dır.

Sonuç 3.17 β' ailesi teorem 3.12 den X üzerinde bir τ' topolojisini üretir. β' ailesi τ' topolojisi için bir taban, $\mathcal{f}'$ ailesi ise, tanım 2.69 dan τ' için bir alt tabandır.

Tanım 3.18 $\mathcal{f}' \subset P(X)$ ailesini alt taban kabul eden τ' topolojisine, **$\mathcal{f}'$ nün ürettiği topoloji** denir.

Sonuç 3.19 τ' topolojisi X üzerinde $\mathcal{f}'$ yü kapsayan topolojilerin en kabası (en az eleman içereni) dir.

İspat: X üzerinde $\mathcal{f}\mathcal{l}'$ yü kapsayan bütün topolojiler ailesi $\{\tau_i\}_{i \in I}$ olsun. $\tau(\mathcal{f}\mathcal{l}') = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ alalım. (II. Bölüm, çözülmüş problem 4 den) $\tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. τ' nün oluşumundan $\mathcal{f}\mathcal{l}' \subset \tau'$ ve dolayısıyla $\tau(\mathcal{f}\mathcal{l}') \subset \tau'$ dır.

Diğer taraftan her $W \in \tau'$ için τ' nün tanımından

$$W = \bigcup_{B_i \in \theta'} \left(\bigcap_{A_i \in \varphi'} A_i \right), \theta' \subset \beta', \varphi' \subset \mathcal{f}\mathcal{l}' \text{ sonlu}$$

şeklinde yazılabilir. Hipotezden $\mathcal{f}\mathcal{l}' \subset \tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ olmasından $A_i \in \tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ dır. $\tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ topoloji olduğundan (t_2) den $\bigcap_{A_i \in \varphi'} A_i \in \tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ ve $\bigcup_{B_i \in \theta'} \left(\bigcap_{A_i \in \varphi'} A_i \right) \in \tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ dır. O halde $\tau' \subset \tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ bulunur. Böylece $\tau' = \tau(\mathcal{f}\mathcal{l}')$ dır.

Sonuç olarak $\mathcal{f}\mathcal{l}'$ yü kapsayan X üzerindeki topolojilerin en kabası (en az eleman içeren topoloji) $\mathcal{f}\mathcal{l}'$ nün ürettiği topolojidir. Gerçekten, $\forall i \in I$ için $\tau' \subset \tau_i$ dır.

Yukarıdaki teorem ve sonuçlar göstermektedir ki elemanlarının birleşimi X kümesini veren $P(X)$ in bir alt ailesi X üzerindeki bir tek topoloji için bir alt tabandır.

Örnek 3.20 $X=\{a,b\}$ ve $\mathcal{f}l=\{X\}$ olsun. X üzerindeki $\mathcal{f}l$ nın ürettiği topolojiyi bulalım ve X üzerindeki diğer topolojilerle karşılaştıralım.

Çözüm: $\mathcal{f}l$ nın elemanlarının birleşimi X i verdiğiinden $\mathcal{f}l$, X üzerindeki bir topoloji için bir alt taban olabilir. $\mathcal{f}l$ nın elemanlarının her sonlu kesişimlerinin kümesi $\beta=\{X\}$ dır. β nın elemanlarının herhangi birleşimlerinin oluşturduğu $\tau=\{\emptyset, X\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. X üzerinde $\mathcal{f}l$ yı kapsayan $\tau_1=\{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_2=\{\emptyset, X, \{b\}\}$ topolojileri τ dan daha incedir, yani $\tau \subset \tau_1, \tau \subset \tau_2$ dır.

Örnek 3.21 $X=\{a,b,c,d,e\}$ ve $\mathcal{f}l = \{\{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}\} \subset P(X)$ olsun. X üzerinde $\mathcal{f}l$ nin ürettiği topolojiyi bulalım.

Çözüm: Önce $\mathcal{f}l$ nin elemanlarının birleşimi X i verdiğiine bakalım.

$$\{a,b,c\} \cup \{c,d\} \cup \{d,e\} = \{a,b,c,d,e\} = X$$

olduğundan $\mathcal{f}l$, X üzerinde bir topoloji üretir. Gerçekten, $\mathcal{f}l$ nin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu β ailesini bulalım. $\beta = \{ \bigcap_{A \in \varphi} A : \varphi \subset \mathcal{f}l \text{ sonlu} \}$

olduğundan

$$\{a,b,c\} \cap \{a,b,c\} = \{a,b,c\}, \{c,d\} \cap \{c,d\} = \{c,d\}, \{d,e\} \cap \{d,e\} = \{d,e\}$$

$$\{a,b,c\} \cap \{c,d\} = \{c\}, \{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \emptyset,$$

$$\{c,d\} \cap \{d,e\} = \{d\}, \{a,b,c\} \cap \{c,d\} \cap \{d,e\} = \emptyset$$

dır. Ayrıca $\mathcal{f}l$ ailesinin boş alt ailesi üzerinden sonlu kesişim X i verir. Böylece

$$\beta = \{ \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset, X \}$$

ailesi bulunur. β nin elemanlarının herhangi birleşimlerinin oluşturduğu $\tau = \{ \bigcup_{B \in \theta} B : \theta \subset \beta \}$ ailesinin

$$\tau = \{ \emptyset, X, \{a,b,c,d\}, \{c,d,e\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{c\}, \{d\} \}$$

olduğu kolayca bulunur. Yine kolayca gösterilebilir ki τ ailesi $(t_1), (t_2)$ ve (t_3) özelliklerini sağlar. Böylece τ , $\mathcal{F}$ nin ürettiği topolojidir.

Örnek 3.22 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathcal{f}l = \{(-\infty, b), (a, +\infty) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \subset P(\mathbb{R})$ olsun. $\mathcal{f}l$ ailesini alt taban kabul eden $\mathbb{R}$ üzerindeki topolojiyi bulalım.

Çözüm: $\mathcal{f}l$ nın elemanlarının birleşimi $\mathbb{R}$ yı verdiğiinden $\mathcal{f}l$ bir alt taban olabilir. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{f}l$ nın elemanlarının her bir sonlu kesişiminin oluşturduğu aile $\beta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ dır. Teorem 2.63 den β , $\mathbb{R}$ nın alışılmış topolojisi için bir tabandır. O halde $\mathcal{f}l, \mathbb{R}$ nın alışılmış topolojisi için bir alt tabandır.

Not: Bu bölümle ilgisi olan dizi, ağ ve süzgeç kavramları ile topolojik yapı oluşturma V. Bölümde verilecektir.

TOPOLOJİ ELDE ETME METODLARI – II

Bu bölümde III. Bölümde farklı olarak verilmiş topolojik yapılardan faydalanarak yeni topolojik yapılar oluşturacağız. Bunu yaparken ihtiyaç duyacağımız kavramları ilgili yerde ifade edeceğiz. Topolojik yapılardan faydalanarak oluşturulan topolojilerin II. Bölümde verilen topolojiye ait temel kavramları sağladığı da gösterilecektir.

Topolojik Alt Uzay

Birinci bölümde (X, d) metrik uzayının herhangi bir A alt kümesi üzerinde d metriğinden faydalanarak yeni bir metrik oluşturmuş ve bu metrikle birlikte A ya X in alt metrik uzayı demiştik (teorem 1.13). Bu işlemin, verilen bir (X, τ) topolojik uzayı ve $A \subset X, A \neq \emptyset$ için nasıl yapılacağını verelim:

Teorem 4.1. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

$$\tau_A = \{W' = A \cap W : W \in \tau\}$$

ailesi, A kümesi üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) dır.

İspat:

t₁) $A, \emptyset \in \tau_A$?

$X \in \tau$ ve $A \cap X = A$ olduğundan $A \in \tau_A$ dır. $\emptyset \in \tau$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \tau_A$ dır.

t₂) Herhangi $\{W_i'\}_{i \in J} \subset \tau_A$ (J sonlu) için $\bigcap_{i \in J} W_i' \in \tau$?

a) $\bigcap_{i \in J} W_i' = \emptyset$ ise, (t₁) den $\bigcap_{i \in J} W_i' \in \tau_A$ dır.

b) $\bigcap_{i \in J} W_i' \neq \emptyset$ olsun. $\forall i \in J$ ve $W_i' \in \tau_A$ için $W_i' = A \cap W_i$ olacak şekilde $W_i \in \tau$ vardır. $\forall i \in J$ için $W_i' = A \cap W_i$ olduğundan

$$\bigcap_{i \in J} W_i' = \bigcap_{i \in J} (A \cap W_i) = A \cap \left(\bigcap_{i \in J} W_i \right)$$

dır. τ nun topoloji ve $\bigcap_{i \in J} W_i \in \tau$ olmasından $\bigcap_{i \in J} W_i' \in \tau_A$ dır.

t₃) Herhangi $\{W_i'\}_{i \in I} \subset \tau_A$ için $\bigcup_{i \in I} W_i' \in \tau_A$?

a) $\bigcup_{i \in I} W_i' = A$ ise, (t₁) den $\bigcup_{i \in I} W_i' \in \tau_A$ dır.

b) $\bigcup_{i \in I} W_i' \neq A$ olsun. $\forall i \in I$ ve $W_i' \in \tau_A$ için $W_i' = A \cap W_i$ olacak şekilde $W_i \in \tau$ vardır. $\forall i \in I$ için $W_i' = A \cap W_i$ olduğundan

$$\bigcup_{i \in I} W_i' = \bigcup_{i \in I} (A \cap W_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} W_i \right)$$

dır. τ nun topoloji ve $\bigcup_{i \in I} W_i \in \tau$ olmasından $\bigcup_{i \in I} W_i' \in \tau_A$ dır. O halde τ_A , A üzerinde bir topolojidir.

Tanım 4.2. A kümesi üzerinde Teorem 4.1 ile τ tarafından oluşturulan τ_A topolojisine **τ dan indirgenen (rölatif) topoloji**, (A, τ_A) topolojik uzayına (X, τ) topolojik uzayının **alt uzayı** denir.

Örnek 4.3. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ ve $A = \{a, c, e\} \subset X$ olsun. A kümesi üzerindeki τ_A topolojisini bulalım.

Çözüm: $\tau_A = \{W' = A \cap W : W \in \tau\}$ olduğundan, τ_A nın elemanları

$$\begin{aligned} A \cap X &= A, \quad A \cap \{a\} = \{a\}, \quad A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}, \quad A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\} \\ A \cap \emptyset &= \emptyset, \quad A \cap \{a, b\} = \{a\}, \quad A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\} \end{aligned}$$

dır. O halde $\tau_A = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$ 'dır. Kolayca gösterilebilir ki τ_A , A üzerinde bir topolojidir.

$\{a, c\}$ ve $\{a, e\}$ kümeleri τ_A topolojisine göre açık olmasına rağmen τ ya göre açık olmadığına dikkat edilmelidir.

τ_A ya göre herhangi bir açığın, τ ya göre açık olması için A nın τ ya göre açık olması gerekir; gerçekten $\forall W \in \tau$ için $A \cap W = W' \in \tau_A$ 'dır. Özel olarak $W = X$ alınırsa, $A \cap X = A \in \tau$ olur.

Bunun tersi de doğrudur, yani $A \in \tau$ ise, $A \cap W = W' \in \tau$? A ve $W \in \tau$ olduğundan (t_2) den $A \cap W = W' \in \tau$ dır

Örnek 4.4. $(\mathbb{R}, \tau)$ alışılmış topolojik uzay, $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ve τ_I , I üzerindeki indirgenmiş topoloji olsun. Bu durumda I nin altkümeleri olan

i) $(\frac{1}{2}, 1]$

ii) $(\frac{2}{8}, \frac{1}{2})$

iii) $(0, \frac{1}{2}]$

kümeleri, τ_I ye göre açık altkümeler midir?

Çözüm:

i) $(\frac{1}{2}, 1] = I \cap (\frac{1}{2}, 2)$ ve $(\frac{1}{2}, 2) \in \tau$ olması, $(\frac{1}{2}, 1] \in \tau_I$ 'dır.

ii) $(\frac{2}{8}, \frac{1}{2}) = I \cap (\frac{2}{8}, \frac{1}{2})$ ve $(\frac{2}{8}, \frac{1}{2}) \in \tau$ olması, $(\frac{2}{8}, \frac{1}{2}) \in \tau_I$ dır.

iii) I ile ara kesiti $(0, \frac{1}{2}]$ olacak şekilde τ alışılmış topolojisinde hiçbir açık olmadığından $(0, \frac{1}{2}] \notin \tau_I$ dır.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Topolojik Yapı Oluşturma III

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 11