



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş
Topolojik Yapı Oluşturma II

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 10

Teorem 3.4 $X \neq \emptyset$ bir küme ve X in altkümelerinden oluşan ve teorem 2.9 daki $(k_1), (k_2)$ ve (k_3) özelliklerini sağlayan κ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden X üzerinde bir tek τ topolojisi vardır.

İspat: $\tau = \{A \subset X: A^c \in \kappa\}$ olsun. Gösterelim ki τ ailesi bir topolojidir.

$t_1)$ $\emptyset, X \in \tau$?

$\emptyset \subset X$ ve $\emptyset^c = X$ dir. (k_1) den $\emptyset^c = X \in \kappa$ olduğu için $\emptyset \in \tau$ dir. Diğer taraftan $X \subset X$ ve $X^c = \emptyset$ dir. (k_1) den $X^c = \emptyset \in \kappa$ olduğu için $X \in \tau$ dir.

$t_2)$ herhangi $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$?

$i=1, 2, \dots, n$ için $A_i \in \tau \Leftrightarrow A_i^c \in \kappa$ dir. $i=1, 2, \dots, n$ için $A_i^c \in \kappa$ olması (k_2) den

$\bigcup_{i=1}^n A_i^c = (\bigcap_{i=1}^n A_i)^c \in \kappa$ dir. τ nun tanımından $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$ dir.

t₃) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$?

$\forall i \in I$ için $A_i \in \tau \Leftrightarrow A_i^c \in \kappa$ dır. $\forall i \in I$ için $A_i^c \in \kappa$ olması (k₃) den $\bigcap_{i \in I} A_i^c = (\bigcup_{i \in I} A_i)^c \in \kappa$ dır. τ nun tanımından $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır. Böylece τ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

τ topolojisinin her bir elemanının açık olması ve tanım 2.8 den

$$\forall A \in \tau \text{ açık} \Leftrightarrow \forall A^c \text{ kapalı}$$

dır. O halde τ topolojisine göre κ ailesi kapalılar ailesidir.

Şimdi gösterelim ki τ tektir. Kabul edelim ki κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden X üzerinde bir başka τ' topolojisi var olsun. Tanım 2.8 den

$$\forall A \in \tau \text{ için } A^c \in \kappa \text{ dır. O halde } A \in \tau' \text{ dır.} \Rightarrow \tau \subset \tau'$$

$$\forall B \in \tau' \text{ için } B^c \in \kappa \text{ dır. O halde } B \in \tau \text{ dır.} \Rightarrow \tau' \subset \tau$$

olur. Buradan $\tau = \tau'$ bulunur.

Örnek 3.5 $X \neq \emptyset$ sonsuz çoklukta elemana sahip bir küme ve $\kappa = \{X, K \subset X: K \text{ sonlu} \}$ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda κ ailesi $(k_1), (k_2)$ ve (k_3) özelliklerini sağlar. Gerçekten,

$k_1)$ $\emptyset \subset X$ ve $\emptyset$ sonlu olduğundan $\emptyset \in \kappa$ dır. κ nın tanımından $X \in \kappa$.

$k_2)$ Herhangi $K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa$ için $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$?

a) Eğer $K_1, K_2, \dots, K_n$ lerden biri X e eşit ise, diğerleri de X in altkümesi olduğundan $\bigcup_{i=1}^n K_i = X$ olur. (k_1) den $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$ dır.

b) Eğer $X, K_1, K_2, \dots, K_n$ lerden hiç birine eşit değil ise, $i=1, 2, \dots, n$ için K_i sonlu olduğundan $\bigcup_{i=1}^n K_i$ de sonlu ve $\bigcup_{i=1}^n K_i \subset X$ olduğundan $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$ dır.

$k_3) \{K_i\}_{i \in I} \subset \kappa$ için $\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$?

a) $\forall i \in I$ için K_i lerden bir tanesi $\emptyset$ kümeye eşit ise, $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$ olur. (k_1) den

$\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$ dır. Ayrıca $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$ ise, (k_1) den $\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$ dır.

b) $\forall i \in I$ için $K_i \neq \emptyset$ ve $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ ise, $\forall i \in I$ için K_i ler sonlu olduğundan kesişimleri de sonlu ve X in altkümesidir. Böylece $\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$ dır.

Şimdi teorem 3.4 e göre κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden topolojiyi yazalım;

$$\tau = \{ \emptyset, A \subset X : A^c = K \in \kappa, A^c \text{ sonlu} \}$$

Bu topoloji (II. Bölümdeki çözülmüş problem 2 deki) sonlu tümleyenler topolojisinden başkası değildir.

Teorem 3.6 $X \neq \emptyset$ kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\alpha: P(X) \rightarrow P(X)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $A, B \in P(X)$ için,

$$K_1) \alpha(\emptyset) = \emptyset,$$

$$K_2) A \subset \alpha(A),$$

$$K_3) \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B),$$

$$K_4) \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$$

olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde $\kappa = \{K \subset X: \alpha(K) = K\}$ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden bir tek τ topolojisi vardır, öyle ki bu topolojiye göre her $A \subset X$ altkümesinin $\bar{A}$ kapanışı $\alpha(A)$ ya eşittir.

İspat: Önce $\kappa = \{K \subset X: \alpha(K) = K\}$ ailesinin Teorem 2.9 da ki $(k_1), (k_2)$ ve (k_3) özelliklerini sağladığını gösterelim.

$k_1) \emptyset, X \in \kappa$?

$\emptyset \subset X$ ve (K_1) den $\alpha(\emptyset) = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \kappa$ dır. $X \subset X$ ve (K_1) den $X \subset \alpha(X)$ dır. Diğer taraftan α fonksiyonunun değer kümesi $P(X)$ ve $\alpha(X) \in P(X)$ olmasından $\alpha(X) \subset X$ dır. O halde $\alpha(X) = X$ bulunur. Böylece $X \in \kappa$ dır.

$k_2)$ Herhangi $K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa$ için $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$?

a) $i=1, 2, \dots, n$ için K_i lerden birisi X e eşit ise, $\bigcup_{i=1}^n K_i = X$ olur. (k_1) den $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$ dır.

b) $i=1, 2, \dots, n$ için $K_i \neq X$ olsun. $i=1, 2, \dots, n$ için $K_i \in \kappa$ olduğundan $\alpha(K_i) = K_i$ dır. O halde $\bigcup_{i=1}^n K_i = \bigcup_{i=1}^n \alpha(K_i)$ dır. (K_4) özelliğinden $\bigcup_{i=1}^n \alpha(K_i) = \alpha(\bigcup_{i=1}^n K_i)$ dır. Böylece

$\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$ bulunur.

$k_3) \{K_i\}_{i \in I} \subset \kappa$ için $K = \bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$?

a) $K = \bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$ ise, (k_1) den $K = \bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$ dır.

b) $K = \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ ise, $\forall i \in I$ için $K = \bigcap_{i \in I} K_i \subset K_i$ dır. $K \subset K_i$ için gösterelim ki

$\alpha(K) \subset \alpha(K_i)$ dır. $K \subset K_i \Rightarrow K_i = K \cup K_i$ olacağından (K_3) den $\alpha(K_i) = \alpha(K \cup K_i) = \alpha(K) \cup \alpha(K_i)$ dır. O halde $\alpha(K) \subset \alpha(K_i)$ dır. $\forall i \in I$ için $\alpha(K) \subset \alpha(K_i)$ ve $\alpha(K_i) = K_i$ olmasından $\alpha(K) \subset \bigcap_{i \in I} \alpha(K_i) = \bigcap_{i \in I} K_i = K \Rightarrow \alpha(K) \subset K$ olur. (K_2) den $K \subset \alpha(K)$ dır.

O halde $\alpha(K) = K$ dır. Yani $\alpha(\bigcap_{i \in I} K_i) = \bigcap_{i \in I} K_i$ dır. κ nın tanımından $\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$ dır.

κ ailesi $(k_1), (k_2)$ ve (k_3) özelliklerini sağladığına göre, teorem 3.4 den κ yi kapalılar ailesi olarak kabul eden X üzerinde $\tau = \{K^c : K \in \kappa\}$ topolojisi vardır. κ ailesi α fonksiyonu ile tek olarak belirlendiğinden, κ nın elamanlarının tümleyenleri ile belirlenen τ topolojisi de tektir.

Şimdi her $A \subset X$ altkümesinin τ topolojisine göre kapanışı olan $\bar{A}$ kümesinin $\alpha(A)$ ya eşit olduğunu gösterelim. κ ailesinin tanımı ve (K_4) den $\forall A \subset X$ için $\alpha(A) \in \kappa$ dır. O halde $A \subset \alpha(A)$ olması ve tanım 2.29 dan $\alpha(A) \in \kappa_A$ dır. Böylece

$$\bar{A} \subset \alpha(A) \quad (1)$$

dır. Diğer taraftan her $K \in \kappa_A$ için $K = A \cup K$ dır. (K_3) den $K = \alpha(K) = \alpha(A \cup K) = \alpha(A) \cup \alpha(K) = \alpha(A) \cup K$ dır. Buradan $\alpha(A) \subset K$ dır. Bu ifadenin κ_A üzerinden kesişimini alırsak

$$\alpha(A) \subset \bigcap_{K \in \kappa_A} K = \bar{A} \Rightarrow \alpha(A) \subset \bar{A} \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $\alpha(A) = \bar{A}$ bulunur.

Bu son eşitlik göz önüne alındığında teorem 3.6 da verilen $(K_1), (K_2), (K_3)$ ve (K_4) özellikleri ile sonuç 2.40 da verilen ve Kuratowski kapanış işlemi diye adlandırılan $(K_1), (K_2), (K_3)$ ve (K_4) özellikleri aynıdır.

Sonuç 2.40 ve Teorem 3.6 birlikte göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.7 Boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir topolojik yapının olması için gerek ve yeter şart Kuratowski şartlarının sağlanmasıdır.

Örnek 3.8 Boş olmayan bir X kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde bir $\alpha:P(X)\rightarrow P(X)$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. $\forall A\in P(X)$ için ,

$$\alpha(A) = \begin{cases} X, & A \neq \emptyset \\ \emptyset, & A = \emptyset \end{cases}$$

olsun. Kolayca gösterilebilir ki α fonksiyonu $(K_1), (K_2), (K_3)$ ve (K_4) özelliklerini sağlar. Teorem 3.6 daki κ ailesinin elemanları $P(X)$ kuvvet kümesine eşittir. Çünkü X in boştan farklı her altkümesinin α altındaki görüntüsü X olarak tanımlanmış ve $\emptyset$ da α altında $\emptyset$ a dönüşmektedir. O halde κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden X üzerindeki

$$\tau = \{K^c \subset X: K \in \kappa\}$$

topolojisi X üzerindeki ayrık topolojiden başkası değildir. yani $\tau = P(X)$ dır.

İç İşlem ile Topolojik Yapı Oluşturma

Teorem 3.9 Boş olmayan bir X kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\beta:P(X)\rightarrow P(X)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $A,B\in P(X)$ için,

$$I_1) \beta(X)=X,$$

$$I_2) \beta(A) \subset A,$$

$$I_3) \beta(\beta(A))=\beta(A),$$

$$I_4) A\subset B\Rightarrow\beta(A)\subset\beta(B),$$

$$I_5) \beta(A\cap B)=\beta(A)\cap\beta(B)$$

olsun. Bu durumda $\tau =\{A \subset X:\beta(A)=A\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye göre $\forall A \subset X$ altkümesinin içi olan $\overset{\circ}{A}$ kümesi, $\beta(A)$ kümesine eşittir.

İspat: τ ailesinin topoloji olduğunu gösterelim.

$t_1)$ $\emptyset, X \in \tau$?

$\emptyset \subset X$ ve (I_2) den $\beta(\emptyset) \subset \emptyset$ dır. Diğer taraftan $\emptyset$ küme her kümenin altkümesi olduğundan $\emptyset \subset \beta(\emptyset)$ dır. O halde $\beta(\emptyset) = \emptyset$ dır. τ nun tanımından $\emptyset \in \tau$ dır. $X \subset X$ ve (I_1) den $X \in \tau$ dır.

$t_2)$ Herhangi $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$?

a) $\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$ ise, (t_1) den $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$ dır.

b) $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ olsun. $i=1, 2, \dots, n$ için $A_i \in \tau$ olduğundan $\beta(A_i) = A_i$ dır. Buradan

$\bigcap_{i=1}^n \beta(A_i) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ dır. (I_5) den $\bigcap_{i=1}^n \beta(A_i) = \beta(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ dır. τ tanımından $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$ bulunur.

$t_3) \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $A = \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$?

a) $A = X$ ise, (t_1) den $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

b) $A \neq X$ olsun. $\forall i \in I$ için $A_i \subset A$ ve (I_4) den $\beta(A_i) \subset \beta(A)$ dır. $\forall i \in I$ için $\beta(A_i) \subset \beta(A)$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} \beta(A_i) \subset \beta(A)$ dır. $\forall i \in I$ için $A_i \in \tau$ olduğundan $\beta(A_i) = A_i$ dır. O halde

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \beta(A_i) \subset \beta(A) \Rightarrow A \subset \beta(A)$$

olur. (I_2) den $\beta(A) \subset A$ dır. Böylece $\beta(A) = A$ dır, yani $\beta(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} A_i$ dır. Bu da $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ olması demektir.

Şimdi $\forall A \subset X$ için $\overset{\circ}{A} = \beta(A)$ olduğunu gösterelim. (I_3) den $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ olduğundan $\beta(A) \in \tau$ dır. τ tanımından $\beta(A) = A$ ve $\overset{\circ}{A} = \beta(\overset{\circ}{A})$ dır. $\beta(A) \in \tau$ ve teorem 2.44 (iv) den $\beta(A) = \beta(\overset{\circ}{A})$ dır. O halde $\overset{\circ}{A} = \beta(A)$ dır.

Boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturmak için, X kümesinin bütün açıkalarının oluşturduğu τ ailesini bulmak yerine, τ nun elemanlarını oluşturacak, belirlenmiş özellikleri sağlayacak daha az sayıda eleman içeren bir aile bize topoloji oluşturmada kolaylık sağlayacaktır.

Tanım 3.10 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\beta' \subset P(X)$ alt aile olsun. β' ailesine ait kümelerin herhangi birleşimine eşit olan bütün kümelerin oluşturduğu aileye β' **nün ürettiği** (doğurduğu) **aile** denir ve τ' ile gösterilir. $\beta' \subset \tau'$ olduğu açıktır.

Teorem 3.11 $X \neq \emptyset$ bir küme ve tanım 3.10 da ki τ' ailesi verilmiş olsun. Bu durumda $A \in \tau'$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in A$ için $\exists B \in \beta'$ var $\ni x \in B \subset A$ ise.

İspat: $A \in \tau'$ olsun. Tanım 3.10 dan A kümesi β' nün bir alt ailesinin birleşimidir, yani $A = \bigcup_{B \in \theta'} B$, $\theta' \subset \beta'$ dır. Dolayısıyla $\forall x \in A$ için $\exists B \in \theta'$ var $\ni x \in B \subset A$ dır.

Tersine olarak, $\forall x \in A$ için $\exists B_x \in \beta'$ var $\ni x \in B_x \subset A$ olsun. $\forall x \in A$ için $x \in B_x$ olduğundan $A \subset \bigcup_{x \in A} B_x$ dır. Yine, $\forall x \in A$ için $B_x \subset A$ olduğundan $\bigcup_{x \in A} B_x \subset A$ dır. O halde $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, $B_x \in \beta'$ dır. Böylece $A \in \tau'$ dır.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



16

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Topolojik Yapı Oluşturma II

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 10