ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Topolojik Yapı Oluşturma

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 9

Tanım 2.84 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, (X,τ) topolojik uzayının **ayrılabilir uzay** denir.

Örnek 2.85 (R,τ) alışılmış topolojik uzay ve $Q \subset R$ olsun. Örnek 2.59 dan $\overline{Q}=R$ dir. Q sayılabilir olduğundan (R,τ) uzayı ayrılabilir bir uzaydır.

Örnek 2.86 $(X,\tau=(\emptyset,X))$ ayrık olmayan topolojik uzayı ayrılabilir bir uzaydır, eğer X sayılabilir bir uzay ise. Gerçekten, $\forall A \subset X$, $A \neq \emptyset$ için $\bar{A}=X$ dir ve X sayılabilir olduğundan A da sayılabilirdir. Benzer şekilde $(X,P(X))$ ayrık uzayın ayrılabilir olması için X in sayılabilir bir küme olması gerekir. Çünkü bu ayrık uzayın bir tek yoğun altkümesi var o da kendisidir.

Teorem 2.87 (X,τ) ikinci sayılabilir bir uzay olsun. Bu durumda (X,τ) topolojik uzayı ayrılabilir bir uzaydır.

İspat: $\beta = \{B_n : n \in Z^+\}$ ailesi τ topolojisinin sayılabilir bir tabanı olsun. Her $n \in Z^+$ için B_n kümesinden bir x_n elemanı alarak bir A kümesini oluşturalım A nın oluşumundan sayılabilir X in bir altkümesidir. Şimdi gösterelim ki $\bar{A}=X$ dır. Bunun için göstermeliyiz ki $\forall x \in X$ noktası A kümesinin bir değme noktasıdır. Kabul edelim ki $\exists x \in X$ var $\ni$ $x \notin \bar{A}$ dır. O halde $x \in \bar{A}^c$ dır. $\bar{A}$ kapalı, $\bar{A}^c$ açıktır ve $\bar{A}^c \in \tau$ dır. β taban olduğundan

$$x \in B_n \subset \bar{A}^c \qquad (1)$$

olacak şekilde $B_n \in \beta$ vardır. A nın oluşumundan $A \cap B_n \neq \emptyset$ dır. Bu da (1) ifadesiyle çelişir. Bu çelişki $x \notin \bar{A}$ olmakla ortaya çıktı. O Halde, $\forall x \in X$ için $x \in \bar{A}$ ve dolayısıyla $\bar{A}=X$ dır. Böylece (X,τ) ayrılabilir bir uzaydır.

Tanım 2.88 $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve fl $=\{A_i : i \in I\}$ ailesi verilmiş olsun. Eğer X kümesi fl nın elemanlarının birleşimi tarafından kapsanıyor ise, yani

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \in \text{fl}$$

ise, fl ailesine X kümesinin **bir örtüsü** denir. Eğer örtünün elemanları sonlu ise, örtüye **sonlu örtü** denir. Eğer örtünün elemanları sayılabilir ise, örtüye **sayılabilir örtü** denir.

Eğer X, fl nın bir Б alt ailesinin elemanlarının birleşimi tarafından kapsanıyor ise, Б ye **alt örtü** denir.

Tanım 2.89 X in bir topolojik uzay olması ve fl örtüsünün bütün elemanlarının açık olması halinde örtüye **açık örtü**, fl örtüsünün bütün elemanlarının kapalı olması halinde de örtüye **kapalı örtü** denir.

Örnek 2.90 (R,τ) alışılmış topolojik uzay olsun fl $=\{(a,b) : a,b \in R, a < b\}$ şeklinde tanımlanan fl ailesi, R nın açık bir örtüsüdür.

Tanım 2.91 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü var ise, (X,τ) uzayına **Lindelöf uzay** denir.

Teorem 2.92 (Lindelöf) (X,τ) ikinci sayılabilir bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A nın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır.

İspat: fl $=\{A_i : i \in I\}$ ailesi A kümesinin açık bir örtüsü olsun. Bu durumda $\forall x \in A$ için $\exists A_x \in$ fl var $\ni x \in A_x$ dır. X uzayı ikinci sayılabilir olduğundan sayılabilir bir β tabanı vardır. A_x açık olduğundan β nın elemanlarının bazı bileşimine eşittir. Bu durumda $\forall x \in A$ için $B_x \subset A_x$ olacak şekilde $B_x \in \beta$ vardır. Diğer taraftan

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset \bigcup_{x} A_x \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

bulunur. Böylece $\beta' = \{\beta_x : x \in A\} \subset \beta$ ailesi A nın sayılabilir bir örtüsüdür. β' ailesi sayılabilir olduğundan $\beta' = \{\beta_n : n \in N\}$ şeklinde yazar ve $\forall x \in A$ için $\beta_x \subset A_x$ olduğu da göz önüne alınırsa, $\forall n \in N$ için $B_n \subset A_n$ olacak şekilde $A_n \in$ fl elemanlarını bulabiliriz. O halde

$$A \subset \bigcup_{n} B_n \subset \bigcup_{n} A_n \subset \bigcup_{i} A_i$$

olur ve $\{A_n : n \in N\} \subset$ fl nın sayılabilir bir alt örtüsüdür.

III. BÖLÜM

TOPOLOJİ ELDE ETME METODLARI-I

Boştan farklı bir X kümesi üzerinde topolojik yapıların oluşturulması için bir çok metot vardır. Bu bölümde ortada hiç topoloji yokken $X \neq \varnothing$ kümesi üzerine topolojilerin nasıl konulacağını göstereceğiz. Bunun için II. Bölümde topoloji ve topolojik uzaylar için verilen temel kavramlardan faydalanarak topolojik yapılar oluşturacağız. Bir kümenin tanım 2.1 deki özellikleri sağlayan açık alt kümelerini bulmak her zaman pek kolay değildir. Örneğin, R reel sayıların açık aralıklarını kullanarak oluşturulan ailenin tanım 1.1 deki özellikleri sağladığı gösterilse de,herhangi bir kümenin açıklarını belirlemek için kullanacağınız her hangi bir kural yoksa,açıkları belirlemeniz imkansızdır.

Birinci bölümde olduğu gibi $X \neq \varnothing$ kümesi üzerinde metrik fonksiyonu tanımlı olması X in açık alt kümelerini belirleme imkanı verdi. Bu açıkları kullanarak X üzerine topolojik yapıların konulabileceğini ikinci bölümde gösterdik. Demek ki $X \neq \varnothing$ kümesi üzerine topoloji koymanın bir yolu, o küme üzerinde bir metrik fonksiyonunun tanımlı olmasıdır.

Şimdi ikinci bölümdeki kavramlardan faydalanarak boştan farklı bir küme üzerine topolojik yapının nasıl konulacağını sırasıyla verelim:

Teorem 3.1 Bir $X\neq\emptyset$ kümesinin her $x\in X$ noktası için komşuluk aksiyomu diye adlandırılan (N_1), (N_2), (N_3) ve (N_4) özelliklerini sağlayan $\beta(x)$ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde bir tek τ topolojisi var öyle ki bu topolojiye göre $x\in X$ noktasının komşuluklar ailesi $N(x)$, $\beta(x)$ e eşittir.

İspat: $\beta(x)$ den faydalanarak bir τ ailesi tanımlayalım:

$$\tau=\{A\in P(X):\ x\in A \text{ ve } A\in\beta(x)\} \qquad (3.1)$$

olsun. Önce τ ailesinin sonlu kesişim ve keyfi birleşime nazaran kapalı olduğunu gösterelim:

t_2) Herhangi $A_1, A_2, \ldots, A_n \in\tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in\tau$?

(N_1) aksiyomundan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq\emptyset$ dır. $x\in\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ olsun. $i=1,2,\ldots,n$ için $x\in A_i\in\beta(x)$ dır. (N_3) aksiyomundan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in\beta(x)$ dır. τ nun tanımından $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in\tau$ bulunur.

$t_3)$ $\{A_i\}_{i\in I}\subset\tau$ $(I\neq\varnothing)$ için $\bigcup\limits_{i\in I} A_i\in\tau$?

$x\in\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ olsun. Birleşim işleminden $\exists\ i_0\in I$ için $x\in A_{i_0}$ dır. $A_{i_0}\in\beta(x)$ ve $A_{i_0}\subset\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ olması ve (N_2) aksiyomundan $\bigcup\limits_{i\in I} A_i\in\beta(x)$ dır. τ nun tanımından $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\in\tau$ bulunur.

$t_1)$ $\varnothing, X\in\tau$?

Kesişim ve birleşim işlemi tanımlı olduğundan $\bigcup\limits_{i\in\varnothing}A_i=\varnothing$ ve $\bigcap\limits_{i\in\varnothing}A_i=X$ dir. τ nun tanımından $\varnothing, X\in\tau$ bulunur. Böylece τ, X üzerinde bir topolojidir.

τ topolojisine göre $x\in X$ noktasının komşuluklar ailesi $N(x)$ olsun. $N(X)=\beta(x)$?

$\forall N\in N(x)$ için $\exists U\in\tau$ var $\ni$ $x\in U\subset N$ dır. $U\in\tau$ ve $x\in U$ olduğundan $U\in\beta(x)$ dır. (N_2) aksiyomundan $N\in\beta(x)$ dır. O halde

$$N(x)\subset\beta(x) \qquad (1)$$

dır.

$\forall\ A\in\beta(x)$ için $W=\{y\in X: A\in\beta(y)\}$ olsun. $A\in\beta(x)$ olduğundan W nın tanımından $x\in W$ ve $W\neq\varnothing$ dır. $\forall y\in W$ için $A\in\beta(y)$ ve (N_1) aksiyomundan $y\in A$ dır. O halde $W\subset A$ dır.

$W \in \tau$ mu? W nın açık olduğunu göstermek için W, her elemanının komşuluğu olduğunu göstermek yeterlidir. $A \in \beta(y)$ için (N_4) aksiyomundan $V \subset A$ olacak şekilde $\exists V \in \beta(y)$ vardır öyle ki her $z \in V$ için $A \in \beta(z)$ dır. O halde $z \in A$ olması W nın tanımından $z \in W$ dır. Böylece $V \subset W$ dır. $V \in \beta(y)$ ve (N_2) aksiyomundan $W \in \beta(y)$ dır. Böylece W içindeki her noktanın komşuluğudur. O halde $W \in \tau$ dır. Sonuç olarak A,x noktasının komşuluğudur, yani $A \in N(x)$ dır. Böylece

$$\beta(x) \subset N(x) \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den $\beta(x)=N(x)$ dır.

Son olarak τ nun tekliğini gösterelim. Hipotezde verilen şartları sağlayan bir başka τ' topolojisi var olsun. Teorem 2.17 den τ ve τ' nün açıkları aynı olduğundan $\tau=\tau'$ dür.

Örnek 3.2 R reel sayılar kümesi ve her $x \in R$ için

$$\beta(x) = \{A \subset R : x \in (a_x , b_x) \subset A, a_x , b_x \in R\}$$

ailesini tanımlayalım. Kolayca gösterilebilir ki $\beta(x)$ ailesi komşuluk aksiyomları diye bilinen (N_1),(N_2),(N_3) ve (N_4) aksiyomlarını sağlar. O halde teorem 3.1 den her $x \in R$ için $\beta(x)$ ailesini, x noktasının komşuluklar ailesi olarak kabul eden τ' topolojisi R nın alışılmış τ topolojisinden (teorem 2.63) başkası değildir. Gerçekten, $A \in \tau$ herhangi bir eleman olsun. Teorem 2.63 den A kümesi açık aralıkların bir birleşimidir. O halde her $x \in A$ elemanı A tarafından kapsanan bir (a_x , b_x) açık aralığına aittir. $\beta(x)$ in tanımından $A \in \beta(x)$ dır. Teorem 3.1 den $A \in \tau'$ dır. Bu da

$$\tau \subset \tau' \qquad (1)$$

demektir.

$V \in \tau'$ herhangi bir eleman ise, (3.1) de $x \in V$ için $V \in \beta(x)$ dır. O halde x noktasını içeren ve V tarafından kapsanan bir (a_x , b_x) açık aralığı vardır. Böylece V kümesi bu açık aralıkların birleşimi olarak yazılabilir. Teorem 2.63 den $V \in \tau$ dır. Bu da

$$\tau' \subset \tau \qquad (2)$$

demektir. Böylece (1) ve (2) den $\tau = \tau'$ bulunur.

Örnek 3.3 $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\forall x \in X$ için $\beta(x)=\{A \subset X : x \in A\}$ olsun. Kolayca gösterilebilir ki $\beta(x)$ ailesi komşuluk aksiyomlarını sağlar. O halde teorem 3.1 den X üzerinde

$$\tau = \{A \in P(X) : \forall x \in A,\ A \in \beta(x)\}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji olup, bu topoloji X üzerindeki ayrık topolojiden başkası değildir, yani $\tau = P(X)$ dır.

Eğer her $x \in X$ için $\beta(x)=\{X\}$ alınırsa,bu aile X üzerinde ayrık olmayan (kaba) topolojiyi belirler, yani $\tau = \{\varnothing, X\}$ dır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Topolojik Yapı Oluşturma

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 9